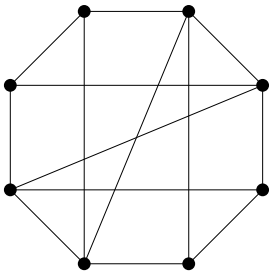
Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Rohodněte, jestli je graf na obrázku rovinný či nikoli.



Úloha 2: Ukažte, že graf $K_{m,n}$ je rovinný právě když $\min\{m, n\} \leq 2$.

Úloha 3: Dokažte, že každý souvislý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem (tah se může jen "dotýkat" ve vrcholech).

Úloha 4: Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný, a najděte příklad co největšího rovinného grafu, jehož doplněk je rovinný.

Úloha 5: Existuje kubický (tj. 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

a) právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?

b) právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

c) jednu dvacetiúhelníkovou stěnu a deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

Úloha 6: Charakterizujte

a) takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.

b) takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.

Úloha 7: Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

Úloha 8: Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.

(Platí to i pro tři lesy, ale to už není tak snadné dokázat.)

Úloha 9: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Úloha 10: Dokažte větu o třech barvách pro vnějškově rovinné grafy, t.j. pro grafy jež mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Úloha 11: Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 12: Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.