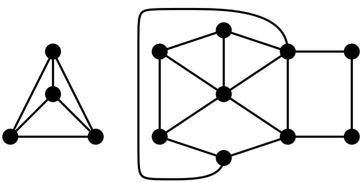
Rovinné grafy

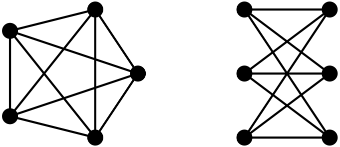
- Chceme popsat grafy, které lze nakreslit do roviny bez křížení hran.

Rovinné grafy

- Chceme popsat grafy, které lze nakreslit do roviny bez křížení hran.



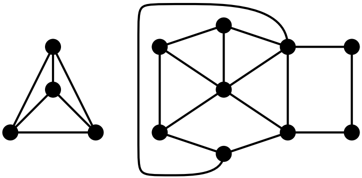
ANO



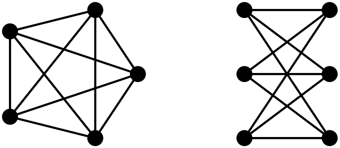
NE

Rovinné grafy

- Chceme popsat grafy, které lze nakreslit do roviny bez křížení hran.



ANO



NE

- Dá nám trochu práci vůbec jen říci pořádnou definici.

Kreslení hrany - spojité funkce

- Intuitivně: představme si že máme roztrženou gumičku (interval $[0, 1]$).

Kreslení hrany - spojité funkce

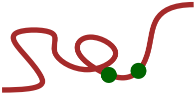
- Intuitivně: představme si že máme roztrženou gumičku (interval $[0, 1]$).

- Gumičku zdeformujeme, umístíme do roviny, povolujeme sebekřížení.

Kreslení hrany - spojité funkce

- Intuitivně: představme si že máme roztrženou gumičku (interval $[0, 1]$).

- Gumičku zdeformujeme, umístíme do roviny, povolujeme sebekřížení.

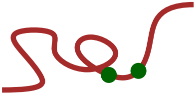


- Jsou-li dva body blízko na gumičce blízko před deformací, potom nejsou příliš daleko ani po deformaci.

Kreslení hrany - spojité funkce

- Intuitivně: představme si že máme roztrženou gumičku (interval $[0,1]$).

- Gumičku zdeformujeme, umístíme do roviny, povolujeme sebekřížení.



- Jsou-li dva body blízko na gumičce blízko před deformací, potom nejsou příliš daleko ani po deformaci.

Definice (Nebude se zkoušet.)

Funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in [0,1]$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $\forall x \in [0,1]\colon |x-a| < \delta \Rightarrow \operatorname{dist}(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě.

Oblouk a kreslení grafu

Definice

Oblouk je prostý spojitý obraz intervalu $[0,1]$ v rovině, tj. podmonžina tvaru $\gamma([0,1]) = \{\gamma(x) \colon x \in [0,1]\}$, kde $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme koncové body oblouku.

Oblouk a kreslení grafu

Definice

Oblouk je prostý spojitý obraz intervalu $[0,1]$ v rovině, tj. podmonžina tvaru $\gamma([0,1]) = \{\gamma(x) \colon x \in [0,1]\}$, kde $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme koncové body oblouku.

Definice

Nakreslením grafu $G = (V, E)$ rozumíme přiřazení, kde každém vrcholu $v \in V$ přiřadíme bod $b(v) \in \mathbb{R}^2$ a každé hraně $e = \{u, v\}$ přiřadíme oblouk $o(e)$ s koncovými body $b(u)$ a $b(v)$. Přitom předpokládáme, že zobrazení je prosté a také, že žádný z bodů $b(v)$ není nekoncovým bodem žádného z oblouků $o(e)$.

Oblouk a kreslení grafu

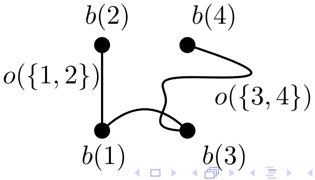
Definice

Oblouk je prostý spojitý obraz intervalu $[0,1]$ v rovině, tj. podmonžina tvaru $\gamma([0,1]) = \{\gamma(x) \colon x \in [0,1]\}$, kde $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme koncové body oblouku.

Definice

Nakreslením grafu $G = (V, E)$ rozumíme přiřazení, kde každém vrcholu $v \in V$ přiřadíme bod $b(v) \in \mathbb{R}^2$ a každé hraně $e = \{u, v\}$ přiřadíme oblouk $o(e)$ s koncovými body $b(u)$ a $b(v)$. Přitom předpokládáme, že zobrazení je prosté a také, že žádný z bodů $b(v)$ není nekoncovým bodem žádného z oblouků $o(e)$.

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$$



Rovinné grafy

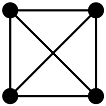
Definice

Nakreslení grafu G je rovinné, pokud libovolné dva různé oblouky sdílejí nanejvýš koncové body. Graf je rovinný, pokud má rovinné nakreslení.

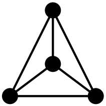
Rovinné grafy

Definice

Nakreslení grafu G je rovinné, pokud libovolné dva různé oblouky sdílejí nanejvýš koncové body. Graf je rovinný, pokud má rovinné nakreslení.



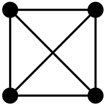
K_4 je rovinný, lze totiž nakreslit:



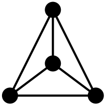
Rovinné grafy

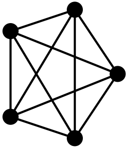
Definice

Nakreslení grafu G je rovinné, pokud libovolné dva různé oblouky sdílejí nanejvýš koncové body. Graf je rovinný, pokud má rovinné nakreslení.

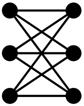


K_4 je rovinný, lze totiž nakreslit:





K_5



$K_{3,3}$

Rovinné nejsou (dá práci dokázat)

Stěny rovinného nakreslení

Definice

Množina $f \subseteq R^2$ je obloukově souvislá, pokud pro každé $x, y \in F$ existuje oblouk uvintř f s koncovými body x a y. Stěna grafu $G = (V, E)$ s daným rovinným nakreslením je (v inkluzi) maximální obloukově souvislá podmnožina

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\{b(v)\colon v \in V\} \cup \{o(e)\colon e \in E\}$$

(při použití značení jako v definici nakreslení grafu).

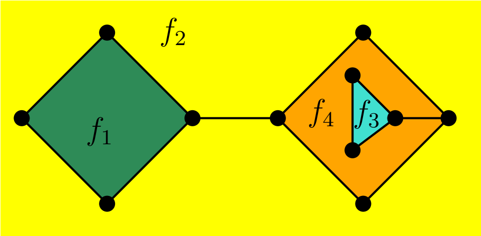
Stěny rovinného nakreslení

Definice

Množina $f \subseteq R^2$ je obloukově souvislá, pokud pro každé $x, y \in F$ existuje oblouk uvintř f s koncovými body x a y. Stěna grafu $G = (V, E)$ s daným rovinným nakreslením je (v inkluzi) maximální obloukově souvislá podmnožina

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\{b(v)\colon v \in V\} \cup \{o(e)\colon e \in E\}$$

(při použití značení jako v definici nakreslení grafu).



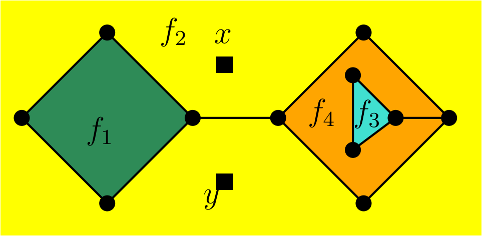
Stěny rovinného nakreslení

Definice

Množina $f \subseteq R^2$ je obloukově souvislá, pokud pro každé $x, y \in F$ existuje oblouk uvintř f s koncovými body x a y. Stěna grafu $G = (V, E)$ s daným rovinným nakreslením je (v inkluzi) maximální obloukově souvislá podmnožina

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\{b(v) \colon v \in V\} \cup \{o(e) \colon e \in E\}$$

(při použití značení jako v definici nakreslení grafu).



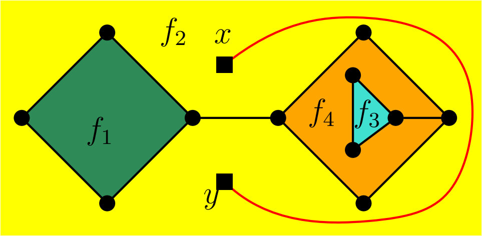
Stěny rovinného nakreslení

Definice

Množina $f \subseteq R^2$ je obloukově souvislá, pokud pro každé $x, y \in F$ existuje oblouk uvintř f s koncovými body x a y. Stěna grafu $G = (V, E)$ s daným rovinným nakreslením je (v inkluzi) maximální obloukově souvislá podmnožina

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\{b(v) \colon v \in V\} \cup \{o(e) \colon e \in E\}$$

(při použití značení jako v definici nakreslení grafu).



Eulerova formule

Věta (Eulerova formule/Eulerův vzorec)

Nechť G je neprázdný souvislý rovinný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť s je počet stěn v nějakém rovinném nakreslení G. Potom

$$n - m + s = 2.$$

Speciálně tedy počet stěn nezávisí na volbě rovinného nakreslení.

Eulerova formule

Věta (Eulerova formule/Eulerův vzorec)

Nechť G je neprázdný souvislý rovinný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť s je počet stěn v nějakém rovinném nakreslení G. Potom

$$n - m + s = 2.$$

Speciálně tedy počet stěn nezávisí na volbě rovinného nakreslení.

Důkaz.

- Indukcí podle m.

Eulerova formule

Věta (Eulerova formule/Eulerův vzorec)

Nechť G je neprázdný souvislý rovinný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť s je počet stěn v nějakém rovinném nakreslení G. Potom

$$n - m + s = 2.$$

Speciálně tedy počet stěn nezávisí na volbě rovinného nakreslení.

Důkaz.

- Indukcí podle m.
- 1. IK: $m = 0$, potom ze souvislosti $n = 1$ a $s = 1$.

Eulerova formule

Věta (Eulerova formule/Eulerův vzorec)

Nechť G je neprázdný souvislý rovinný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť s je počet stěn v nějakém rovinném nakreslení G. Potom

$$n - m + s = 2.$$

Speciálně tedy počet stěn nezávisí na volbě rovinného nakreslení.

Důkaz.

- Indukcí podle m.
- 1. IK: $m = 0$, potom ze souvislosti $n = 1$ a $s = 1$.
- 2. IK: $m \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.

Eulerova formule

Věta (Eulerova formule/Eulerův vzorec)

Nechť G je neprázdný souvislý rovinný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť s je počet stěn v nějakém rovinném nakreslení G. Potom

$$n - m + s = 2.$$

Speciálně tedy počet stěn nezávisí na volbě rovinného nakreslení.

Důkaz.

- Indukcí podle m.
- 1. IK: $m = 0$, potom ze souvislosti $n = 1$ a $s = 1$.
- 2. IK: $m \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.
- Rozlišíme, jestli G obsahuje list (vrchol stupně 1).

Eulerova formule, 2. IK.

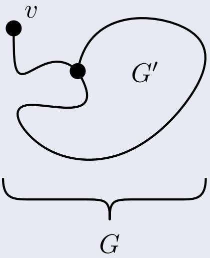
Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

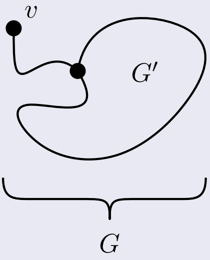


- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

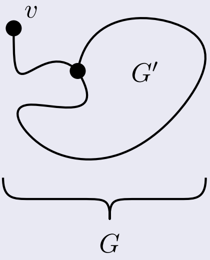


- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

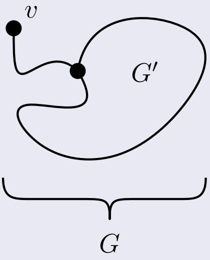


- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

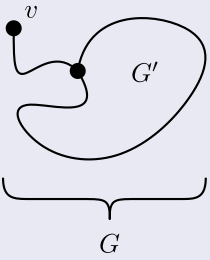


- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.

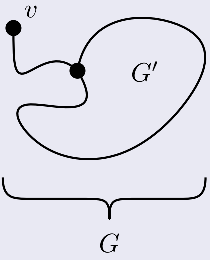


- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.



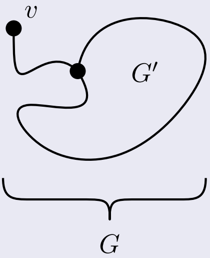
- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

2. G neobsahuje list $\Rightarrow$ G není strom $\Rightarrow$ G má kružnici.

Eulerova formule, 2. IK.

Důkaz - pokračování.

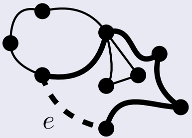
1. G obsahuje list v.



- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

2. G neobsahuje list $\Rightarrow$ G není strom $\Rightarrow$ G má kružnici.

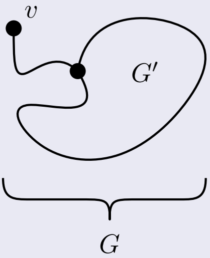
- Nechť e je hrana nějaké kružnice.



Eulerova formule, 2. IK.

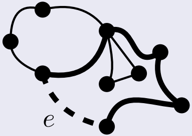
Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.



- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

2. G neobsahuje list $\Rightarrow$ G není strom $\Rightarrow$ G má kružnici.

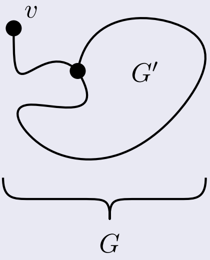


- Nechť e je hrana nějaké kružnice.
- $G' := G - e$.

Eulerova formule, 2. IK.

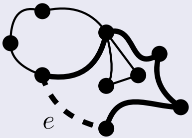
Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.



- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

2. G neobsahuje list $\Rightarrow$ G není strom $\Rightarrow$ G má kružnici.

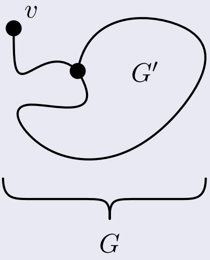


- Nechť e je hrana nějaké kružnice.
- $G' := G - e$.
- $n' = n$, $m' = m - 1$, $s' = s - 1$ (při značení jako v předchozím bodu).

Eulerova formule, 2. IK.

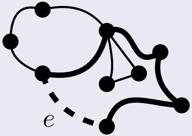
Důkaz - pokračování.

1. G obsahuje list v.



- $G' := G - v$. (Zachováme nakreslení.)
- $n' := |V(G')|$, $m' := |E(G')|$, s' počet stěn nakreslení G'
- $n' = n - 1$, $m' = m - 1$, $s' = s$.
- Ind. předpoklad: $n' - m' + s' = 2$.
- Po dosazení $n - m + s = 2$.

2. G neobsahuje list $\Rightarrow$ G není strom $\Rightarrow$ G má kružnici.



- Nechť e je hrana nějaké kružnice.
- $G' := G - e$.
- $n' = n$, $m' = m - 1$, $s' = s - 1$ (při značení jako v předchozím bodu).
- Opět $n' - m' + s' = 2$, což po dosazení dává $n - m + s = 2$. $\square$

Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ *je rovinný graf s* $n \geq 3$ *vrcholy a* m *hranami. Potom* $m \leq 3n - 6$.

Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:

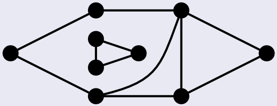
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý

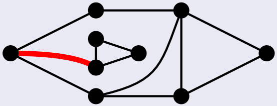
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý

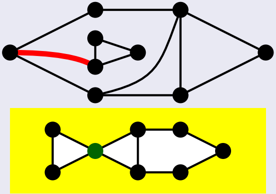
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý
2. Podél žádné stěny se neopakují vrcholy.

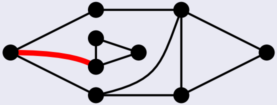
Maximální počet hran rovinného grafu

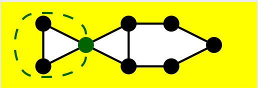
Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:





1. G' je souvislý
2. Podél žádně stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.

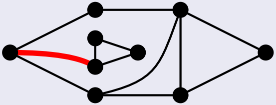
Maximální počet hran rovinného grafu

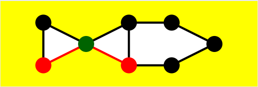
Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:





1. G' je souvislý
2. Podél žádně stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.
   - Sousedy v různých komponentách lze spojit hranou.

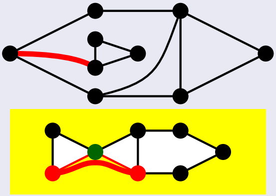
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý
2. Podél žádné stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.
   - Sousedy v různých komponentách lze spojit hranou.
3. Každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

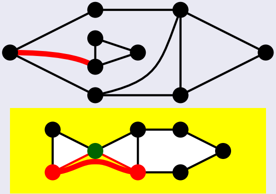
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý
2. Podél žádně stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.
   - Sousedy v různých komponentách lze spojit hranou.
3. Každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

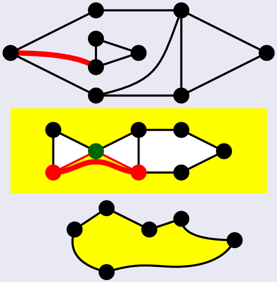
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý
2. Podél žádně stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.
   - Sousedy v různých komponentách lze spojit hranou.
3. Každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

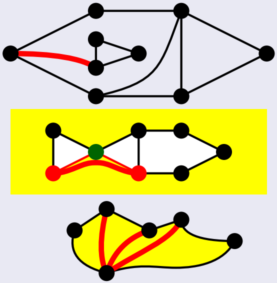
Maximální počet hran rovinného grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz.

- Do grafu přidáváme hrany (dokud je to možné), tak že stále máme rovinné nakreslení. Označme výsledek G'. O G' a jeho nakreslení víme:



1. G' je souvislý
2. Podél žádné stěny se neopakují vrcholy.
   - Takový vrchol by byl řez.
   - Sousedy v různých komponentách lze spojit hranou.
3. Každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- G má n vrcholů a m hran.

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- G má n vrcholů a m hran.
- G' má n vrcholů, označme počet hran m' a počet stěn s'.

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- G má n vrcholů a m hran.
- G' má n vrcholů, označme počet hran m' a počet stěn s'.
- $2m' = 3s'$, protože každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- G má n vrcholů a m hran.
- G' má n vrcholů, označme počet hran m' a počet stěn s'.
- $2m' = 3s'$, protože každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- Podle Eulerova vzorce:

$$
\begin{aligned}
n - m' + s' &= 2 \\
n - m' + \frac{2}{3}m' &= 2 \\
n - 2 &= \frac{m'}{3} \\
m' &= 3n - 6.
\end{aligned}
$$

Maximální počet hran - pokračování důkazu

Důkaz, pokračování.

- Máme tedy souvislý graf G' s nakreslením, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- G má n vrcholů a m hran.
- G' má n vrcholů, označme počet hran m' a počet stěn s'.
- $2m' = 3s'$, protože každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.
- Podle Eulerova vzorce:

$$
\begin{aligned}
n - m' + s' &= 2 \\
n - m' + \frac{2}{3}m' &= 2 \\
n - 2 &= \frac{m'}{3} \\
m' &= 3n - 6.
\end{aligned}
$$

- $m \leq m'$, tedy $m \leq 3n - 6$. $\square$

Vrchol malého stupně v rovinném grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ *je rovinný graf s* $n \geq 3$ *vrcholy a* m *hranami. Potom* $m \leq 3n - 6$.

Vrchol malého stupně v rovinném grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ *je rovinný graf s* $n \geq 3$ *vrcholy a* m *hranami. Potom* $m \leq 3n - 6$.

Důsledek

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.

Vrchol malého stupně v rovinném grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ *je rovinný graf s* $n \geq 3$ *vrcholy a* m *hranami. Potom* $m \leq 3n - 6$.

Důsledek

Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.

Důkaz.

- $\sum_v \deg v = 2m \leq 6n - 12$.

Vrchol malého stupně v rovinném grafu

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důsledek

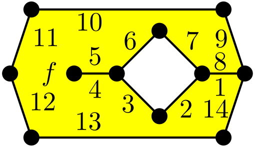
Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.

Důkaz.

- $\sum_v \deg v = 2m \leq 6n - 12$.
- Kdyby $\deg v \geq 6$, pro každé $v \in V$, pak $\sum_v \deg v \geq 6n$, spor. $\square$

Stupně stěn a duální graf

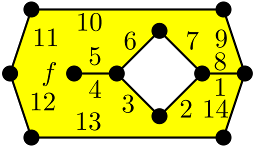
- Máme-li $G = (V, E)$ s rovinným nakreslením a f stěnu v tomto nakreslení, pak můžeme definovat stupeň f, $\deg f$ jako počet hran při průchodu podél hranice f (s opakováním).



$\deg f = 14$

Stupně stěn a duální graf

- Máme-li $G = (V, E)$ s rovinným nakreslením a f stěnu v tomto nakreslení, pak můžeme definovat stupeň f, $\deg f$ jako počet hran při průchodu podél hranice f (s opakováním).

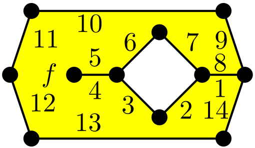


$\deg f = 14$

- Máme princip sudosti pro stěny: $2|E| = \sum_f \deg f$.

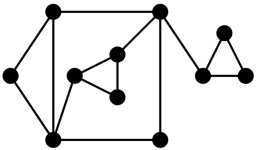
Stupně stěn a duální graf

- Máme-li $G = (V, E)$ s rovinným nakreslením a f stěnu v tomto nakreslení, pak můžeme definovat stupeň f, $\deg f$ jako počet hran při průchodu podél hranice f (s opakováním).



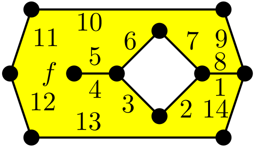
$\deg f = 14$

- Máme princip sudosti pro stěny: $2|E| = \sum_f \deg f$.
- Stupeň stěny = stupeň vrcholu v tzv. duálním grafu.



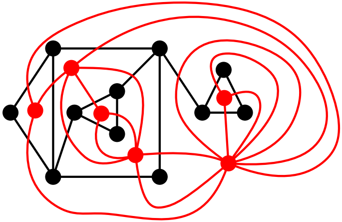
Stupně stěn a duální graf

- Máme-li $G = (V, E)$ s rovinným nakreslením a f stěnu v tomto nakreslení, pak můžeme definovat stupeň f, $\deg f$ jako počet hran při průchodu podél hranice f (s opakováním).



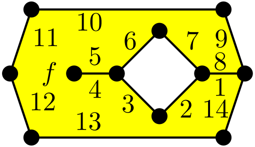
$$\deg f = 14$$

- Máme princip sudosti pro stěny: $2|E| = \sum_f \deg f$.
- Stupeň stěny = stupeň vrcholu v tzv. duálním grafu.



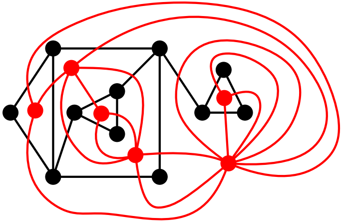
Stupně stěn a duální graf

- Máme-li $G = (V, E)$ s rovinným nakreslením a f stěnu v tomto nakreslení, pak můžeme definovat stupeň f, $\deg f$ jako počet hran při průchodu podél hranice f (s opakováním).



$\deg f = 14$

- Máme princip sudosti pro stěny: $2|E| = \sum_f \deg f$.
- Stupeň stěny = stupeň vrcholu v tzv. duálním grafu.



- Obecně multigraf (povolujeme smyčky a násobné hrany).

Výpočty se stupni stěn.

Příklad

Nechť G je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Ukažte, že $m \leq 2n - 4$.

Výpočty se stupni stěn.

Příklad

Nechť G je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Ukažte, že $m \leq 2n - 4$.

Řešení.

- Každá stěna má stupeň alespoň 4. (Dá trochu práce si rozmyslet.)

Výpočty se stupni stěn.

Příklad

Nechť G je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Ukažte, že $m \leq 2n - 4$.

Řešení.

- Každá stěna má stupeň alespoň 4. (Dá trochu práce si rozmyslet.)
- $2m = \sum_f \deg f \geq 4s$.

Výpočty se stupni stěn.

Příklad

Nechť G je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Ukažte, že $m \leq 2n - 4$.

Řešení.

- Každá stěna má stupeň alespoň 4. (Dá trochu práce si rozmyslet.)
- $2m = \sum_f \deg f \geq 4s$.
- Eulerova formule: $2 = n - m + s \leq n - m + \frac{m}{2} = n - \frac{m}{2}$.

Výpočty se stupni stěn.

Příklad

Nechť G je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami. Ukažte, že $m \leq 2n - 4$.

Řešení.

- Každá stěna má stupeň alespoň 4. (Dá trochu práce si rozmyslet.)
- $2m = \sum_f \deg f \geq 4s$.
- Eulerova formule: $2 = n - m + s \leq n - m + \frac{m}{2} = n - \frac{m}{2}$.
- Tedy: $m \leq 2n - 4$. $\square$

Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.

Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E : v \notin e\}$.

Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E\colon v \notin e\}$.
- Odebrání hrany: $G - e$.

Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E \colon v \notin e\}$.
- Odebrání hrany: $G - e$.
  $V(G - e) := V$.
  $E(G - e) := E \setminus \{e\}$.

Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E \colon v \notin e\}$.
- Odebrání hrany: $G - e$.
  $V(G - e) := V$.
  $E(G - e) := E \setminus \{e\}$.

Nové:

- Kontrakce hrany: G/e, $e = \{u, w\}$.

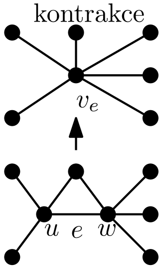
Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E \colon v \notin e\}$.
- Odebrání hrany: $G - e$.
  $V(G - e) := V$.
  $E(G - e) := E \setminus \{e\}$.

Nové:

- Kontrakce hrany: G/e, $e = \{u, w\}$.
  $V(G/e) := (V \setminus \{u, w\}) \cup \{v_e\}$
  $E(G/e) := \{e \in E \colon u, w \notin e\} \cup$
  $\cup \{\{x, v_e\} \colon \{x, u\} \in E \text{ nebo } \{x, w\} \in E\}$



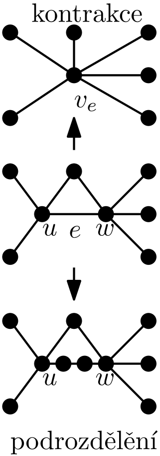
Některé grafové operace

Mějme graf $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Známe:

- Odebrání vrcholu: $G - v$.
  $V(G - v) := V \setminus \{v\}$.
  $E(G - v) := \{e \in E : v \notin e\}$.
- Odebrání hrany: $G - e$.
  $V(G - e) := V$.
  $E(G - e) := E \setminus \{e\}$.

Nové:

- Kontrakce hrany: G/e, $e = \{u, w\}$.
  $V(G/e) := (V \setminus \{u, w\}) \cup \{v_e\}$
  $E(G/e) := \{e \in E : u, w \notin e\} \cup$
  $\cup \{\{x, v_e\} : \{x, u\} \in E \text{ nebo } \{x, w\} \in E\}$
- Podrozdělení hrany e:
  Odebereme hranu e a nahrdíme ji cestou se stejnými koncovými vrcholy. (Bez značení a vzorečku).



Charakterizace rovinných grafů

- Odebírání hrany, odebírání vrcholu, konktrakce hrany a podrozdělení hrany zachovávají rovinnost.

Charakterizace rovinných grafů

- Odebírání hrany, odebírání vrcholu, konktrakce hrany a podrozdělení hrany zachovávají rovinnost.
- Na cvičeních si ukážeme, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Charakterizace rovinných grafů

- Odebírání hrany, odebírání vrcholu, konktrakce hrany a podrozdělení hrany zachovávají rovinnost.
- Na cvičeních si ukážeme, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Definice (nebude se zkoušet)

Dělení grafu G je libovolný graf, který lze získat z G opakováním operace podrozdělení hrany. Minor grafu G je libovolný graf, který lze získat z G odebíráním vrcholů a hran a kontrakcemi hran.

Charakterizace rovinných grafů

- Odebírání hrany, odebírání vrcholu, konktrakce hrany a podrozdělení hrany zachovávají rovinnost.
- Na cvičeních si ukážeme, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Definice (nebude se zkoušet)

Dělení grafu G je libovolný graf, který lze získat z G opakováním operace podrozdělení hrany. Minor grafu G je libovolný graf, který lze získat z G odebíráním vrcholů a hran a kontrakcemi hran.

Věta (Kuratowského věta (bez důkazu, nezkouší se))

Graf je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf.

Charakterizace rovinných grafů

- Odebírání hrany, odebírání vrcholu, konktrakce hrany a podrozdělení hrany zachovávají rovinnost.
- Na cvičeních si ukážeme, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Definice (nebude se zkoušet)

Dělení grafu G je libovolný graf, který lze získat z G opakováním operace podrozdělení hrany. Minor grafu G je libovolný graf, který lze získat z G odebíráním vrcholů a hran a kontrakcemi hran.

Věta (Kuratowského věta (bez důkazu, nezkouší se))

Graf je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf.

Věta (Wagnerova věta (bez důkazu, nezkouší se))

Graf je rovinný, právě když K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou jeho minorem.