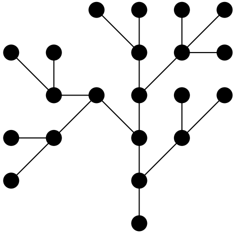
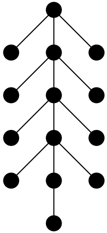
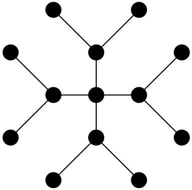
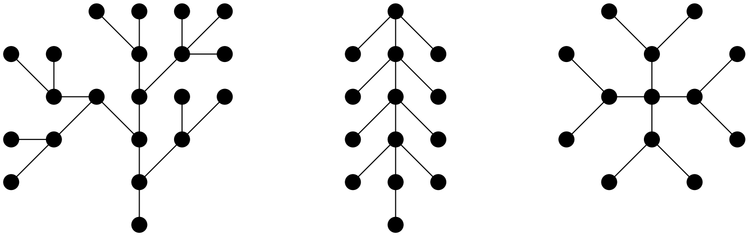
Stromy

Chceme souhrnně popsat grafy, které vypadají jako na obrázcích níže:

Stromy

Chceme souhrnně popsat grafy, které vypadají jako na obrázcích níže:



Definice

Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici. List v nějakém grafu je vrchol stupně 1. Les je graf bez kružnic.

Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.

Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.
- $t \geq 1$, jelikož strom je souvislý, tedy obsahuje alespoň jednu hranu (když má alespoň 2 vrcholy).

Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.
- $t \geq 1$, jelikož strom je souvislý, tedy obsahuje alespoň jednu hranu (když má alespoň 2 vrcholy).
- Chceme ukázat, že v_0 a v_t jsou listy.

Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.
- $t \geq 1$, jelikož strom je souvislý, tedy obsahuje alespoň jednu hranu (když má alespoň 2 vrcholy).
- Chceme ukázat, že v_0 a v_t jsou listy.
- Pro spor existuje hrana $e \neq e_1$ vycházející z v_0, $e = \{v_0, x\}$.

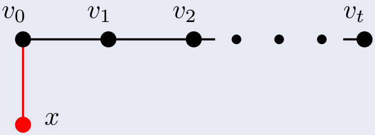
Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.
- $t \geq 1$, jelikož strom je souvislý, tedy obsahuje alespoň jednu hranu (když má alespoň 2 vrcholy).
- Chceme ukázat, že v_0 a v_t jsou listy.
- Pro spor existuje hrana $e \neq e_1$ vycházející z v_0, $e = \{v_0, x\}$.
- Může nastat: $x \neq v_1, \ldots, v_t$: cestu lze prodloužit, spor!



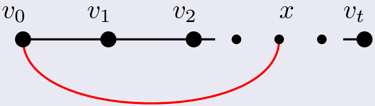
Existence listů

Lemma (o existenci listů)

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz.

- Nechť $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ je cesta maximální možné délky.
- $t \geq 1$, jelikož strom je souvislý, tedy obsahuje alespoň jednu hranu (když má alespoň 2 vrcholy).
- Chceme ukázat, že v_0 a v_t jsou listy.
- Pro spor existuje hrana $e \neq e_1$ vycházející z v_0, $e = \{v_0, x\}$.
- Může nastat: $x \in \{v_1, \ldots, v_t\}$: najdeme kružnici, spor!



□

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii).

- G bez kružnic $\Rightarrow$ $G - v$ bez kružnic.

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii).

- G bez kružnic $\Rightarrow$ $G - v$ bez kružnic.
- Dále chceme ukázat, že $G - v$ je souvislý.

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *G je strom.*
2. *$G - v$ je strom.*

Důkaz (i) ⇒ (ii).

- G bez kružnic ⇒ $G - v$ bez kružnic.
- Dále chceme ukázat, že $G - v$ je souvislý.
- Je-li $x, y \in V(G - v)$, potom existuje cesta v G, která je spojuje (souvislost G).

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii).

- G bez kružnic $\Rightarrow$ $G - v$ bez kružnic.
- Dále chceme ukázat, že $G - v$ je souvislý.
- Je-li $x, y \in V(G - v)$, potom existuje cesta v G, která je spojuje (souvislost G).
- Tato cesta nemůže obsahovat v, protože $\deg_G v = 1$.

Trhání listů

Značení: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom pomocí $G - v$ značíme graf získaný z G odebráním v a všech hran obsahujících v.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii).

- G bez kružnic $\Rightarrow$ $G - v$ bez kružnic.
- Dále chceme ukázat, že $G - v$ je souvislý.
- Je-li $x, y \in V(G - v)$, potom existuje cesta v G, která je spojuje (souvislost G).
- Tato cesta nemůže obsahovat v, protože $\deg_G v = 1$.
- Tedy tato cesta náleží do $G - v$, jak potřebujeme. $\square$

Trhání listů, druhá implikace.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalnentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (i).

Trhání listů, druhá implikace.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalnentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (i).

- $G - v$ je souvislý $\Rightarrow$ G je souvislý (všechny vrcholy z $G - v$ jsou v téže komponentě a v je v téže komponentě jako jeho soused patřící do $G - v$.)

Trhání listů, druhá implikace.

Tvrzení (o trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalnentní:

(i) *G je strom.*

(ii) *$G - v$ je strom.*

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (i).

- $G - v$ je souvislý $\Rightarrow$ G je souvislý (všechny vrcholy z $G - v$ jsou v téže komponentě a v je v téže komponentě jako jeho soused patřící do $G - v$.)
- $G - v$ je bez kružnic $\Rightarrow$ G je bez kružnic (kdyby G obsahovalo kružnici, tak ta se vyhýbá listu v, tudiž je to i kružnice v $G - v$). $\square$

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

(i) *G je strom.*

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *G je strom.*
2. *(jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.*

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. (i) *G je strom.*
2. (ii) *(jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.*
3. (iii) *(minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.*

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *G je strom.*
2. *(jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.*
3. *(minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.*
4. *(maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.*

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. (i) *G je strom.*
2. (ii) *(jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.*
3. (iii) *(minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.*
4. (iv) *(maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.*
5. (v) *(Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.*

Ekvivalentní definice stromů

Věta (o ekvivalentních definicích stromů)

Pro neprázdný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

(i) *G je strom.*

(ii) *(jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.*

(iii) *(minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.*

(iv) *(maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.*

(v) *(Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.*

Schéma důkazu:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(iii)} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
\text{(i)} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & & \text{(ii)} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\text{(v)} & \text{(iv)} \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.
- Je-li $|V| = 1$, potom (ii) i (v) platí.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.
- Je-li $|V| = 1$, potom (ii) i (v) platí.
- Předpokládáme, že (i) $\Rightarrow$ (ii), (v) platí, pokud $|V| \leq n-1$, budeme dokazovat pro $|V| = n$, kde $n \geq 2$.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.
- Je-li $|V| = 1$, potom (ii) i (v) platí.
- Předpokládáme, že (i) $\Rightarrow$ (ii), (v) platí, pokud $|V| \leq n - 1$, budeme dokazovat pro $|V| = n$, kde $n \geq 2$.
- G je strom, podle lemma o existenci listů a o trhání listů existuje list v, že $G - v$ je strom.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.
- Je-li $|V| = 1$, potom (ii) i (v) platí.
- Předpokládáme, že (i) $\Rightarrow$ (ii), (v) platí, pokud $|V| \leq n - 1$, budeme dokazovat pro $|V| = n$, kde $n \geq 2$.
- G je strom, podle lemma o existenci listů a o trhání listů existuje list v, že $G - v$ je strom.
- Podle IP, (ii) a (v) platí pro $G - v$.

Ekvivalentní definice stromů (i) $\Rightarrow$ (ii), (v)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (i) $\Rightarrow$ (ii), (v).

- Indukcí podle $|V|$.
- Je-li $|V| = 1$, potom (ii) i (v) platí.
- Předpokládáme, že (i) $\Rightarrow$ (ii), (v) platí, pokud $|V| \leq n - 1$, budeme dokazovat pro $|V| = n$, kde $n \geq 2$.
- G je strom, podle lemma o existenci listů a o trhání listů existuje list v, že $G - v$ je strom.
- Podle IP, (ii) a (v) platí pro $G - v$.
- Odvodíme, že (ii) a (v) platí pro G. $\square$

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iii) (minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iii) (minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iii).

- G je souvislý (hned plyne z (ii)).

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iii) (minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iii).

- G je souvislý (hned plyne z (ii)).
- Po odebrání hrany $\{x, y\}$ zrušíme jedinou cestu z x do y. $\square$

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iii) (minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iii).

- G je souvislý (hned plyne z (ii)).
- Po odebrání hrany $\{x, y\}$ zrušíme jedinou cestu z x do y. $\square$

Důkaz (iii) $\Rightarrow$ (i).

- G je souvislý (hned plyne z (iii)).

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iii) (minimální souvislost) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iii).

- G je souvislý (hned plyne z (ii)).
- Po odebrání hrany $\{x, y\}$ zrušíme jedinou cestu z x do y. □

Důkaz (iii) $\Rightarrow$ (i).

- G je souvislý (hned plyne z (iii)).
- G neobsahuje kružnici (po odebrání hrany $\{x, y\}$ na kružnici se zachová souvislost, jelikož každou cestu využívající $\{x, y\}$ lze obejít po druhé straně kružnice). □

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iv).

- G neobsahuje kružnici (měli bychom ≥ 2 cesty mezi dvěma vrcholy na kružnici)

Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iv).

- G neobsahuje kružnici (měli bychom ≥ 2 cesty mezi dvěma vrcholy na kružnici)
- Přidáme-li hranu $\{x, y\}$ vznikne tím kružnice z cesty spojující x a y v G a této hrany.

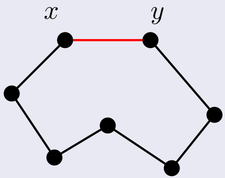
Ekvivalentní definice stromů (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(ii) (jednoznačnost cesty) Pro každé dva vrcholy x, y existuje právě jedna cesta z x do y.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (ii) $\Rightarrow$ (iv).

- G neobsahuje kružnici (měli bychom ≥ 2 cesty mezi dvěma vrcholy na kružnici)
- Přidáme-li hranu $\{x, y\}$ vznikne tím kružnice z cesty spojující x a y v G a této hrany.



□

Ekvivalentní definice stromů (iv) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Ekvivalentní definice stromů (iv) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (iv) $\Rightarrow$ (i).

- G neobsahuje kružnici (hned plyne z (iv)).

Ekvivalentní definice stromů (iv) ⇒ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (iv) ⇒ (i).

- G neobsahuje kružnici (hned plyne z (iv)).
- Je G souvislý?

Ekvivalentní definice stromů (iv) ⇒ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (iv) ⇒ (i).

- G neobsahuje kružnici (hned plyne z (iv)).
- Je G souvislý?
- Jsou-li x, y dva vrcholy G buď jsou spojeny hranou, nebo doplněním hrany $\{x, y\}$ vznikne kružnice.

Ekvivalentní definice stromů (iv) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (iv) $\Rightarrow$ (i).

- G neobsahuje kružnici (hned plyne z (iv)).
- Je G souvislý?
- Jsou-li x, y dva vrcholy G buď jsou spojeny hranou, nebo doplněním hrany $\{x, y\}$ vznikne kružnice.
- Ta dává cestu z x do y v grafu G.

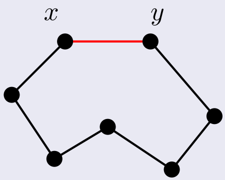
Ekvivalentní definice stromů (iv) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(iv) (maximální bez kružnic) G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany (mezi dva zatím nespojené vrcholy) kružnice vznkne.

Důkaz (iv) $\Rightarrow$ (i).

- G neobsahuje kružnici (hned plyne z (iv)).
- Je G souvislý?
- Jsou-li x, y dva vrcholy G buď jsou spojeny hranou, nebo doplněním hrany $\{x, y\}$ vznikne kružnice.
- Ta dává cestu z x do y v grafu G.



$\square$

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)
- Druhý indukční krok: Dokazujeme pro $|V| \geq 2$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)
- Druhý indukční krok: Dokazujeme pro $|V| \geq 2$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.
- $|V| = |E| + 1$. Podle principu sudosti je součet stupňů roven $2|E| = 2|V| - 2 < 2|V|$.

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)
- Druhý indukční krok: Dokazujeme pro $|V| \geq 2$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.
- $|V| = |E| + 1$. Podle principu sudosti je součet stupňů roven $2|E| = 2|V| - 2 < 2|V|$.
- Tedy G má vrchol stupně ≤ 1, ze souvislosti přesně 1.

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)
- Druhý indukční krok: Dokazujeme pro $|V| \geq 2$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.
- $|V| = |E| + 1$. Podle principu sudosti je součet stupňů roven $2|E| = 2|V| - 2 < 2|V|$.
- Tedy G má vrchol stupně ≤ 1, ze souvislosti přesně 1.
- Nechť $G' = G - v$. G' je souvislý a $|V(G')| = |E(G')| + 1$.

Ekvivalentní definice stromů (v) $\Rightarrow$ (i)

(i) G je strom.

(v) (Eulerův vzorec) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Důkaz (v) $\Rightarrow$ (i).

- Indukcí podle $|V|$. (Opět snadné, pokud $|V| = 1$.)
- Druhý indukční krok: Dokazujeme pro $|V| \geq 2$, předpokládáme platnost pro menší hodnoty.
- $|V| = |E| + 1$. Podle principu sudosti je součet stupňů roven $2|E| = 2|V| - 2 < 2|V|$.
- Tedy G má vrchol stupně ≤ 1, ze souvislosti přesně 1.
- Nechť $G' = G - v$. G' je souvislý a $|V(G')| = |E(G')| + 1$.
- Podle IP je G' strom, tedy podle lemma o trhání listů je i G strom. $\square$

Kostra grafu

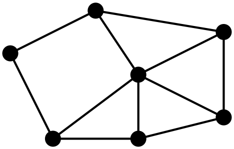
Definice

Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.

Kostra grafu

Definice

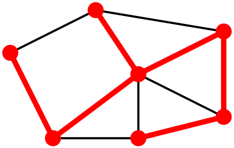
Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.



Kostra grafu

Definice

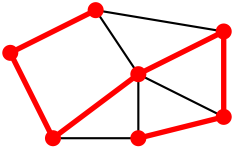
Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.



Kostra grafu

Definice

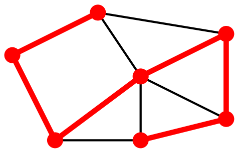
Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.



Kostra grafu

Definice

Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.



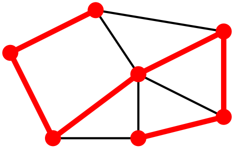
Pozorování

Má-li graf T kostru, potom je souvislý.

Kostra grafu

Definice

Kostra grafu G je libovolný podgraf T, který je strom a obsahuje všechny vrcholy G.



Pozorování

Má-li graf T kostru, potom je souvislý.

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Důkaz.

- Nechť T je strom, který je podgraf G a má maximální možný počet vrcholů.

Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Důkaz.

- Nechť T je strom, který je podgraf G a má maximální možný počet vrcholů.
- Chceme ukázat, že T je kostra.

Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Důkaz.

- Nechť T je strom, který je podgraf G a má maximální možný počet vrcholů.
- Chceme ukázat, že T je kostra.
- Pro spor $V(T) \subsetneq V(G)$.

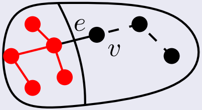
Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Důkaz.

- Nechť T je strom, který je podgraf G a má maximální možný počet vrcholů.
- Chceme ukázat, že T je kostra.
- Pro spor $V(T) \subsetneq V(G)$.
- Ze souvislosti existuje $v \in V(G) \setminus V(T)$, který sousedí s některým z vrcholů z $V(T)$ (přes hranu e).



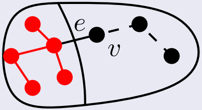
Existence kostry

Tvrzení (o existenci kostry)

Každý souvislý graf má kostru.

Důkaz.

- Nechť T je strom, který je podgraf G a má maximální možný počet vrcholů.
- Chceme ukázat, že T je kostra.
- Pro spor $V(T) \subsetneq V(G)$.
- Ze souvislosti existuje $v \in V(G) \setminus V(T)$, který sousedí s některým z vrcholů z $V(T)$ (přes hranu e).



- Přidáme-li v a e do T, dostáváme podle lemma o trhání listů opět strom. Spor, že T měl maximální počet vrcholů. $\square$