Eulerovské grafy—motivace

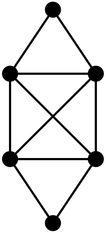
Otázka

Které grafy lze nakreslit v rovině jedním uzavřeným tahem v rovině, aniž bychom zvedli tužku?

Eulerovské grafy—motivace

Otázka

Které grafy lze nakreslit v rovině jedním uzavřeným tahem v rovině, aniž bychom zvedli tužku?

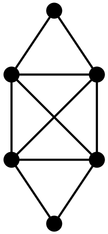


ano

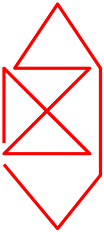
Eulerovské grafy—motivace

Otázka

Které grafy lze nakreslit v rovině jedním uzavřeným tahem v rovině, aniž bychom zvedli tužku?



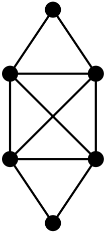
ano



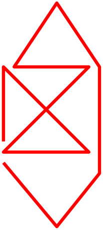
Eulerovské grafy—motivace

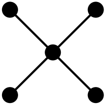
Otázka

Které grafy lze nakreslit v rovině jedním uzavřeným tahem v rovině, aniž bychom zvedli tužku?



ano





ne

Eulerovské grafy—definice

Definice

Mějme tah $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ v grafu $G = (V, E)$. Tento tah nazveme uzavřený, pokud $v_0 = v_t$ a eulerovský, pokud se v něm každá hrána přesně jednou a každý vrchol alespoň jednou.

Eulerovské grafy—definice

Definice

Mějme tah $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ v grafu $G = (V, E)$. Tento tah nazveme uzavřený, pokud $v_0 = v_t$ a eulerovský, pokud se v něm každá hrána přesně jednou a každý vrchol alespoň jednou.
Graf $G = (V, E)$ je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Eulerovské grafy—definice

Definice

Mějme tah $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$ v grafu $G = (V, E)$. Tento tah nazveme uzavřený, pokud $v_0 = v_t$ a eulerovský, pokud se v něm každá hrána přesně jednou a každý vrchol alespoň jednou.
Graf $G = (V, E)$ je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Reformulace předchozí otázky: Které grafy jsou eulerovské?

Věta o eulerovských grafech

Je-li graf G eulerovský, potom musí platit:

- G je souvislý. (Existence sledu mezi libovolnými dvěma vrcholy implikuje existenci cesty.)

Věta o eulerovských grafech

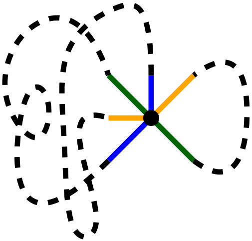
Je-li graf G eulerovský, potom musí platit:

- G je souvislý. (Existence sledu mezi libovolnými dvěma vrcholy implikuje existenci cesty.)
- Stupeň každého vrcholu je sudý.

Věta o eulerovských grafech

Je-li graf G eulerovský, potom musí platit:

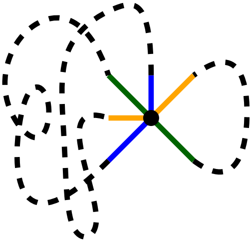
- G je souvislý. (Existence sledu mezi libovolnými dvěma vrcholy implikuje existenci cesty.)
- Stupeň každého vrcholu je sudý.



Věta o eulerovských grafech

Je-li graf G eulerovský, potom musí platit:

- G je souvislý. (Existence sledu mezi libovolnými dvěma vrcholy implikuje existenci cesty.)
- Stupeň každého vrcholu je sudý.



Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz věty o eulerovských grafech

Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.

Důkaz věty o eulerovských grafech

Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.
- $\Leftarrow$ Máme $G = (V, E)$, který je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.

Důkaz věty o eulerovských grafech

Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.
- $\Leftarrow$ Máme $G = (V, E)$, který je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.
- Uvažujeme tah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ maximální možné délky. Chceme ukázat, že se jedná o uzavřený eulerovský tah.

Důkaz věty o eulerovských grafech

Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.
- $\Leftarrow$ Máme $G = (V, E)$, který je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.
- Uvažujeme tah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ maximální možné délky. Chceme ukázat, že se jedná o uzavřený eulerovský tah.
- Uzavřený: pokud $v_0 \neq v_t$, tak lze prodloužit.

Důkaz věty o eulerovských grafech

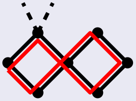
Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.
- $\Leftarrow$ Máme $G = (V, E)$, který je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.
- Uvažujeme tah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ maximální možné délky. Chceme ukázat, že se jedná o uzavřený eulerovský tah.

- Uzavřený: pokud $v_0 \neq v_t$, tak lze prodloužit.



- Pokrývá všechny hrany:

Důkaz věty o eulerovských grafech

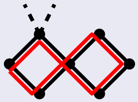
Věta (o eulerovských grafech)

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Již máme.
- $\Leftarrow$ Máme $G = (V, E)$, který je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.
- Uvažujeme tah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ maximální možné délky. Chceme ukázat, že se jedná o uzavřený eulerovský tah.

- Uzavřený: pokud $v_0 \neq v_t$, tak lze prodloužit.



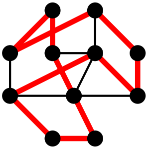
- Pokrývá všechny hrany:
- Pokrývá všechny hrany $\Rightarrow$ pokrývá všechny vrcholy. $\square$

Poznámka o hamiltonovských kružnicích

- Hamiltonovská kružnice = kružnice, která obsahuje všechny vrcholy (ale ne nutně všechny hrany).

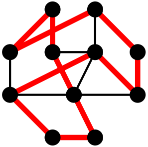
Poznámka o hamiltonovských kružnicích

- Hamiltonovská kružnice = kružnice, která obsahuje všechny vrcholy (ale ne nutně všechny hrany).



Poznámka o hamiltonovských kružnicích

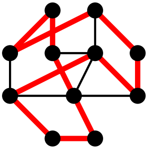
- Hamiltonovská kružnice = kružnice, která obsahuje všechny vrcholy (ale ne nutně všechny hrany).



- Mnohem komplikovanější pojem.

Poznámka o hamiltonovských kružnicích

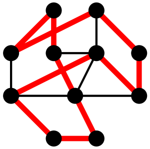
- Hamiltonovská kružnice = kružnice, která obsahuje všechny vrcholy (ale ne nutně všechny hrany).



- Mnohem komplikovanější pojem.
- Není znám žádný rychlý algoritmus, který by poznal, jestli daný graf má hamiltonovskou kružnici.

Poznámka o hamiltonovských kružnicích

- Hamiltonovská kružnice = kružnice, která obsahuje všechny vrcholy (ale ne nutně všechny hrany).



- Mnohem komplikovanější pojem.
- Není znám žádný rychlý algoritmus, který by poznal, jestli daný graf má hamiltonovskou kružnici.
- Jedná se o tzv. NP-těžký problém. Matematici se domnívají, že rychlý algoritmus existovat nemůže.

Orientované grafy

Definice

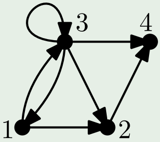
Orientovaný graf $G = (V, E)$ je dvojice, kde $E \subseteq V \times V$. Prvky V jsou vrcholy a prvky E nazýváme oreintované hrany. Pro orientovanou hranu $e = (x, y)$ říkáme, že e vychází z x a vchází do y (začíná v x a končí v y).

Orientované grafy

Definice

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je dvojice, kde $E \subseteq V \times V$. Prvky V jsou vrcholy a prvky E nazýváme oreintované hrany. Pro orientovanou hranu $e = (x, y)$ říkáme, že e vychází z x a vchází do y (začíná v x a končí v y).

Příklad



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

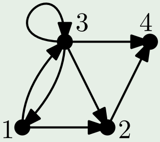
$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Orientované grafy

Definice

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je dvojice, kde $E \subseteq V \times V$. Prvky V jsou vrcholy a prvky E nazýváme oreintované hrany. Pro orientovanou hranu $e = (x, y)$ říkáme, že e vychází z x a vchází do y (začíná v x a končí v y).

Příklad



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

- Pozn.: Říci, že $G = (V, E)$ je orientovaný graf je totéž jako říci, že E je relace na V. (Ale obvykle se relace a orientované grafy používají v zcela jiném kontextu.)

Oreintovaný tah

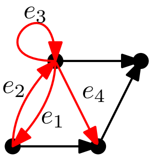
Definice

Orientovaný tah v or. grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m)$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ a navíc se orientované hrany neopakují.

Oreintovaný tah

Definice

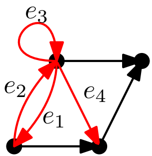
Orientovaný tah v or. grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m)$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ a navíc se orientované hrany neopakují.



Oreintovaný tah

Definice

Orientovaný tah v or. grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m)$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ a navíc se orientované hrany neopakují.

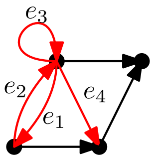


- Podobně se dají definovat orientovaná/ý cesta, sled, kružnice.

Oreintovaný tah

Definice

Orientovaný tah v or. grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m)$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ a navíc se orientované hrany neopakují.



- Podobně se dají definovat orientovaná/ý cesta, sled, kružnice.

Definice

Orientovaný tah je uzavřený, pokud začíná a končí ve stejném vrcholu. Je eulerovský, pokud prochází každou hranu právě jednou a každý vrchol alespoň jednou. Orentovaný graf je eulerovský, pokud má uzavřený eulerovský orientovaný tah.

Slabá a silná souvislost

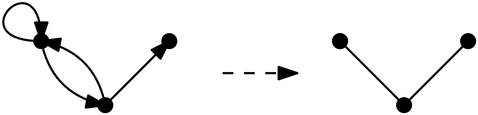
Definice

Je-li dán orientovaný graf $G = (V, E)$, definujeme symetrizaci G jako graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde
$\bar{E} := \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}$.

Slabá a silná souvislost

Definice

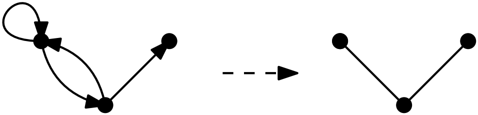
Je-li dán orientovaný graf $G = (V, E)$, definujeme symetrizaci G jako graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde
$\bar{E} := \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}$.



Slabá a silná souvislost

Definice

Je-li dán orientovaný graf $G = (V, E)$, definujeme symetrizaci G jako graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde
$\bar{E} := \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}$.



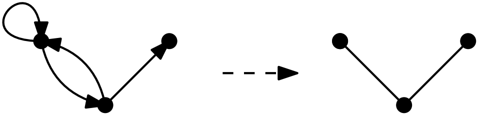
Definice

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je slabě souvislý, pokud je jeho symetrizace souvislá; je silně souvislý, pokud pro každé dva vrcholy x, y vede orientovaná cesta z x do y.

Slabá a silná souvislost

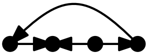
Definice

Je-li dán orientovaný graf $G = (V, E)$, definujeme symetrizaci G jako graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde
$\bar{E} := \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}$.

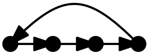


Definice

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je slabě souvislý, pokud je jeho symetrizace souvislá; je silně souvislý, pokud pro každé dva vrcholy x, y vede orientovaná cesta z x do y.



slabě ✓
silně ✗



slabě ✓
silně ✓

Věta o orientovaných eulerovských grafech

Definice

Nechť v je vrchol orientovaného grafu. Potom vstupní stupeň, $\deg^{+}(v)$ je počet hran vcházejících do v a výstupní stupeň, $\deg^{-}(v)$ je počet hran vycházejících z v.

Věta o orientovaných eulerovských grafech

Definice

Nechť v je vrchol orientovaného grafu. Potom vstupní stupeň, $\deg^+(v)$ je počet hran vcházejících do v a výstupní stupeň, $\deg^-(v)$ je počet hran vycházejících z v.

Věta (o orientovaných eulerovských grafech)

Nechť G je orientovaný graf. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. *G je eulerovský.*
2. *G je slabě souvislý a každý jeho vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň.*
3. *G je silně souvislý a každý jeho vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň.*

Věta o orientovaných eulerovských grafech

Definice

Nechť v je vrchol orientovaného grafu. Potom vstupní stupeň, $\deg^+(v)$ je počet hran vcházejících do v a výstupní stupeň, $\deg^-(v)$ je počet hran vycházejících z v.

Věta (o orientovaných eulerovských grafech)

Nechť G je orientovaný graf. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

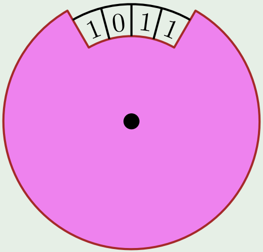
1. *G je eulerovský.*
2. *G je slabě souvislý a každý jeho vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň.*
3. *G je silně souvislý a každý jeho vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň.*

Důkaz $\rightarrow$ cvičení.

Analogie 2^k-stěnné kostky

Příklad

Můžeme vytvořit následující analogii 2^k-stěnné kostky?

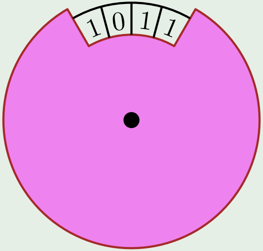


- Umístíme cyklicky na kotouč čísla 0, 1.
- Chceme, aby se každá k-tice vyskytovala právě jednou.
- Přečteme výsledek ve dvojkovém zápisu.

Analogie 2^k-stěnné kostky

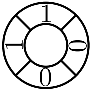
Příklad

Můžeme vytvořit následující analogii 2^k-stěnné kostky?



- Umístíme cyklicky na kotouč čísla 0, 1.
- Chceme, aby se každá k-tice vyskytovala právě jednou.
- Přečteme výsledek ve dvojkovém zápisu.

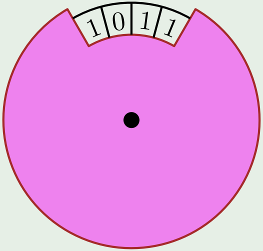
- $k = 2$: 0011



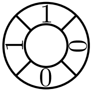
Analogie 2^k-stěnné kostky

Příklad

Můžeme vytvořit následující analogii 2^k-stěnné kostky?



- Umístíme cyklicky na kotouč čísla 0, 1.
- Chceme, aby se každá k-tice vyskytovala právě jednou.
- Přečteme výsledek ve dvojkovém zápisu.



- $k = 2$: 0011
- $k = 3$: 00011101 dává 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

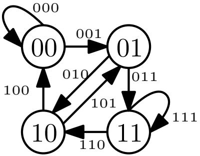
Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

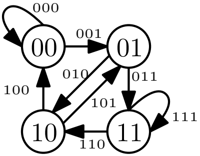
- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ do $(a_2, \dots, a_k)$.

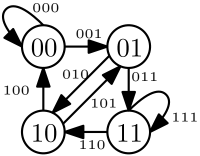


- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.

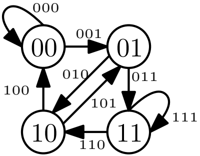


- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.

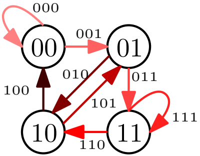


- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



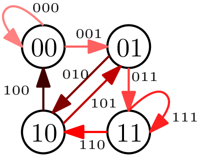
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

000
000

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



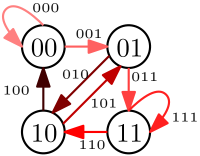
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{r} 001 \\ 0001 \end{array}$$

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



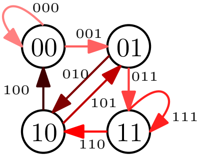
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{r} 011 \\ 00011 \end{array}$$

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



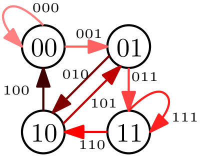
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{r} 111 \\ 000111 \end{array}$$

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



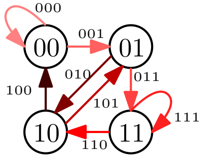
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{r} 110 \\ 0001110 \end{array}$$

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



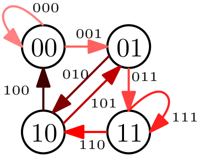
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{r}101\\00011101\end{array}$$

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



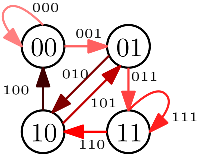
- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

0 01
00011101

Analogie 2^k-stěnné kostky—řešení

Zavedeme orientovaný graf:

- Vrcholy: $(k-1)$-tice nul a jedniček.
- Orientované hrany: Pro každou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nul a jedniček vedeme hranu z $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do $(a_2, \ldots, a_k)$.



- Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je 2.
- Graf je (dokonce silně) souvislý, tedy je eulerovský.
- Uzavřený eulerovský tah vede k hledané posloupnosti.

$$\begin{array}{l}00\qquad\quad 1\\ 00011101\end{array}$$