# Teorie grafů—motivace

- Chceme modelovat interakce mezi dvojicemi objektů.

# Teorie grafů—motivace

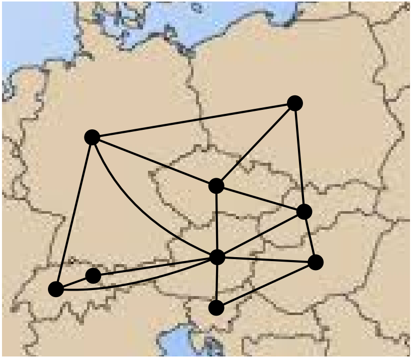
- Chceme modelovat interakce mezi dvojicemi objektů.
- Objekty uvažujeme jako body (v rovině).

# Teorie grafů—motivace

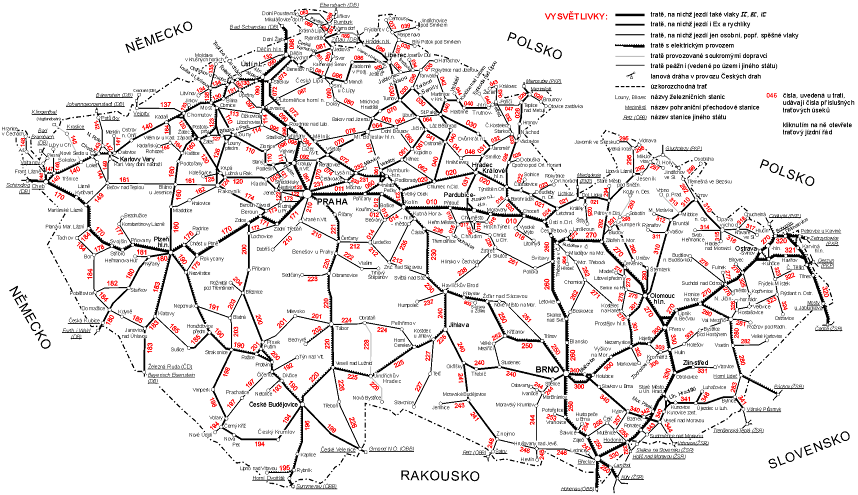
- Chceme modelovat interakce mezi dvojicemi objetků.
- Objekty uvažujeme jako body (v rovině).
- Interakce: Příslušné body spojíme úsečkou/křivkou.

# Teorie grafů—motivace

- Chceme modelovat interakce mezi dvojicemi objetků.
- Objekty uvažujeme jako body (v rovině).
- Interakce: Příslušné body spojíme úsečkou/křivkou.



# Další příklad (až na drobné detaily)



# Definice grafu

## Definice

Graf $G$ je uspořádaná dvojice $(V, E)$, kde $V$ je množina vrcholů $G$ a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran $G$.

# Definice grafu

## Definice

Graf $G$ je uspořádaná dvojice $(V, E)$, kde $V$ je množina vrcholů $G$ a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran $G$.

**Poznámky:**

# Definice grafu

## Definice

Graf $G$ je uspořádaná dvojice $(V, E)$, kde $V$ je množina vrcholů $G$ a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran $G$.

**Poznámky:**

- Pokud zadáme pouze $G$, tak se množina vrcholů obvykle značí $V(G)$ a množina hran $E(G)$.

# Definice grafu

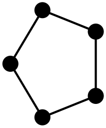
## Definice

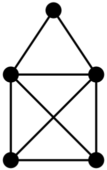
Graf $G$ je uspořádaná dvojice $(V, E)$, kde $V$ je množina vrcholů $G$ a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran $G$.

**Poznámky:**

- Pokud zadáme pouze $G$, tak se množina vrcholů obvykle značí $V(G)$ a množina hran $E(G)$.
- Obvykle budeme pracovat s konečnými grafy, kde $V$ je konečná (a tedy i $E$ je konečná). Ale existují i nekonečné grafy. (Nekonečný případ explicitně zmíníme.)

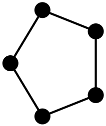
# Kreslení grafů

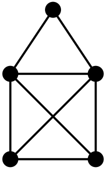




Vrchol $\rightarrow$ bod v rovině
Hrana $\rightarrow$ oblouk/křivka

# Kreslení grafů

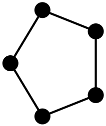


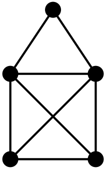


Vrchol $\rightarrow$ bod v rovině
Hrana $\rightarrow$ oblouk/křivka

- Nekreslíme dva vrcholy do stejného bodu.

# Kreslení grafů



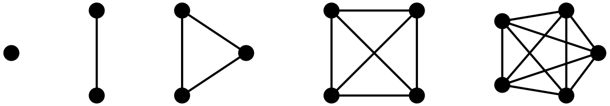


Vrchol $\rightarrow$ bod v rovině
Hrana $\rightarrow$ oblouk/křivka

- Nekreslíme dva vrcholy do stejného bodu.
- Nekreslíme vrchol do vnitřku hrany.

# Důležité třídy grafů

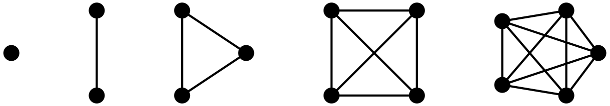
- Úplný graf $K_n$: $V = [n], E = \binom{V}{2}$, $n \geq 1$.



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

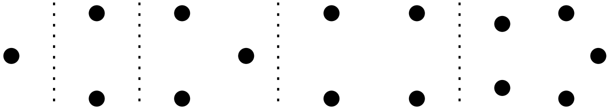
# Důležité třídy grafů

- Úplný graf $K_n$: $V = [n], E = \binom{V}{2}$, $n \geq 1$.



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

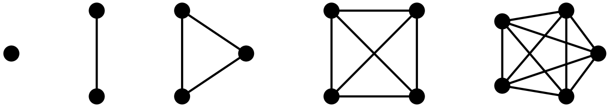
- Nezávislá množina $I_n$: $V = [n], E = \emptyset$, $n \geq 1$



$I_1$ $I_2$ $I_3$ $I_4$ $I_5$

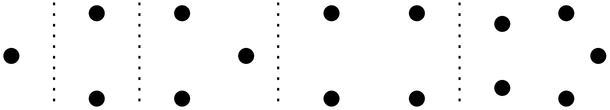
# Důležité třídy grafů

- Úplný graf $K_n$: $V = [n], E = \binom{V}{2}$, $n \geq 1$.



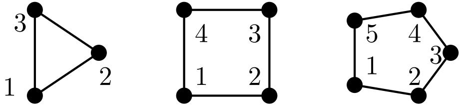
$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

- Nezávislá množina $I_n$: $V = [n], E = \emptyset$, $n \geq 1$



$I_1$ $I_2$ $I_3$ $I_4$ $I_5$

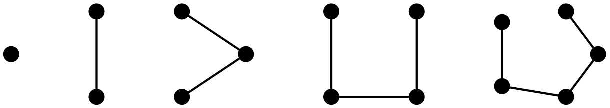
- Kružnice $C_n$: $V = [n], E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{1, n\}\}$, $n \geq 3$.




$C_3$ $C_4$ $C_5$

# Důležité třídy grafů—pokračování

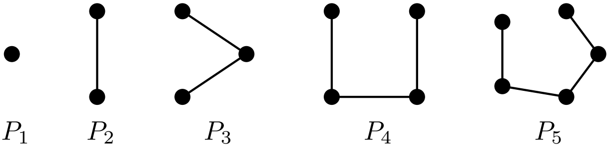
- Cesta s $n$ vrcholy $P_n$ (= cesta délky $n-1$):
  $V = [n], E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$, $n \geq 1$.



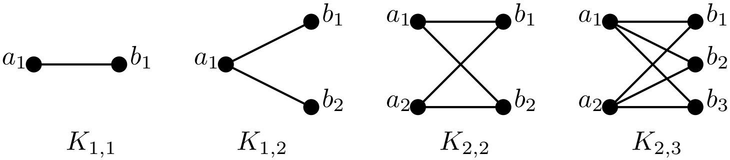
$P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$ $P_5$

# Důležité třídy grafů—pokračování

- Cesta s $n$ vrcholy $P_n$ (= cesta délky $n-1$):
  $V=[n], E=\{\{i,i+1\}: i\in[n-1]\}$, $n\geq 1$.

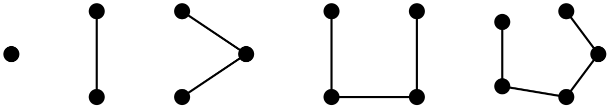



- Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, $m,n\geq 1$.
  - $V=\{a_1,\dots,a_m\}\cup\{b_1,\dots,b_n\}$
  - $E=\{\{a_i,b_j\}: i\in[m], j\in[n]\}$



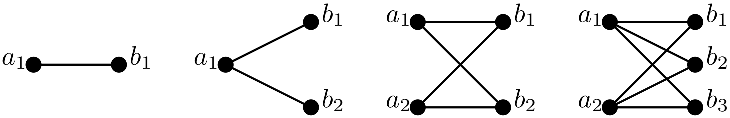
# Důležité třídy grafů—pokračování

- Cesta s $n$ vrcholy $P_n$ (= cesta délky $n-1$):
  $V = [n], E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$, $n \geq 1$.



$P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$ $P_5$

- Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, $m, n \geq 1$.
  - $V = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
  - $E = \{\{a_i, b_j\} : i \in [m], j \in [n]\}$




$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$

# Bipartitní grafy

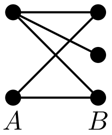
## Definice

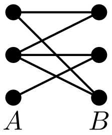
Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud lze $V$ rozdělit na dvě disjunktní množiny $A$ a $B$, tak že žádná hrana nemá oba vrcholy v $A$ ani oba vrcholy v $B$.

# Bipartitní grafy

## Definice

Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud lze $V$ rozdělit na dvě disjunktní množiny $A$ a $B$, tak že žádná hrana nemá oba vrcholy v $A$ ani oba vrcholy v $B$.



# Bipartitní grafy

**Definice**

Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud lze $V$ rozdělit na dvě disjunktní množiny $A$ a $B$, tak že žádná hrana nemá oba vrcholy v $A$ ani oba vrcholy v $B$.


- Úplné bipartitní grafy jsou tedy bipartitní.

# Bipartitní grafy

## Definice

Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud lze $V$ rozdělit na dvě disjunktní množiny $A$ a $B$, tak že žádná hrana nemá oba vrcholy v $A$ ani oba vrcholy v $B$.


- Úplné bipartitní grafy jsou tedy bipartitní.

## Cvičení

Rozmyslete si pro která $n$ jsou které z grafů $K_n$, $I_n$, $C_n$, $P_n$ bipartitní.

# Izomorfismus grafů

**Definice**

Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $f\colon V \to V'$ taková, že pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V$ platí $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Tato bijekce se nazývá izomorfismus grafů $G$ a $G'$.

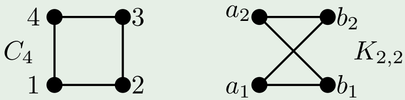
# Izomorfismus grafů

## Definice

Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $f : V \to V'$ taková, že pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V$ platí $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Tato bijekce se nazývá izomorfismus grafů $G$ a $G'$.

## Příklad

Grafy $C_4$ a $K_{2,2}$ jsou izomorfní.




Příklad izomorfismu: $f(1) = a_1, f(2) = b_1, f(3) = a_2, f(4) = b_2$.

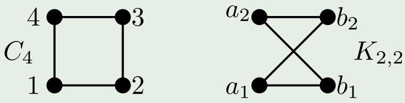
# Izomorfismus grafů

## Definice

Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $f\colon V \to V'$ taková, že pro každé dva různé vrcholy $x, y \in V$ platí $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Tato bijekce se nazývá izomorfismus grafů $G$ a $G'$.

## Příklad

Grafy $C_4$ a $K_{2,2}$ jsou izomorfní.




Příklad izomorfismu: $f(1) = a_1, f(2) = b_1, f(3) = a_2, f(4) = b_2$.

## Cvičení

Najděte všechny izomorfní dvojice mezi grafy $K_n$, $I_n$, $C_n$, $P_n$, $K_{m,n}$.

# Podgrafy a incidence

## Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Dva vrcholy $v_1, v_2$ jsou sousední (též incidentní), pokud $\{v_1, v_2\} \in E$. Vrchol $v \in V$ je sousední (incidentní) s hranou $e \in E$, pokud $v \in e$. Dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ jsou sousední (incidentní), pokud $|e_1 \cap e_2| = 1$.

# Podgrafy a incidence

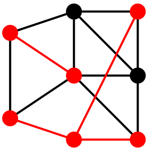
## Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Dva vrcholy $v_1, v_2$ jsou sousední (též incidentní), pokud $\{v_1, v_2\} \in E$. Vrchol $v \in V$ je sousední (incidentní) s hranou $e \in E$, pokud $v \in e$. Dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ jsou sousední (incidentní), pokud $|e_1 \cap e_2| = 1$.
Graf $H$ je podgraf grafu $G$, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$; $H$ je indukovaný podgraf, pokud je podgraf a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Obvyklé značení: je-li $U = V(H)$, tak se indukovaný podgraf značí $G[U]$.

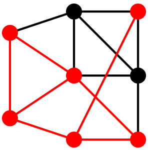
# Podgrafy a incidence

## Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Dva vrcholy $v_1, v_2$ jsou sousední (též incidentní), pokud $\{v_1, v_2\} \in E$. Vrchol $v \in V$ je sousední (incidentní) s hranou $e \in E$, pokud $v \in e$. Dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ jsou sousední (incidentní), pokud $|e_1 \cap e_2| = 1$.
Graf $H$ je podgraf grafu $G$, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$; $H$ je indukovaný podgraf, pokud je podgraf a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Obvyklé značení: je-li $U = V(H)$, tak se indukovaný podgraf značí $G[U]$.



podgraf



indukovaný podgraf

# Sled, tah a cesta a definice souvislosti

## Definice

Mějme v grafu $G$ posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ (povoleno $t = 0$). Tato posloupnost je

- sled délky $t$, pokud $\forall i \in [t]$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$;

# Sled, tah a cesta a definice souvislosti

## Definice

Mějme v grafu $G$ posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ (povoleno $t = 0$). Tato posloupnost je

- sled délky $t$, pokud $\forall i \in [t]$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$;
- tah délky $t$, pokud je sled a navíc se v této posloupnosti neopakují hrany; a

# Sled, tah a cesta a definice souvislosti

## Definice

Mějme v grafu $G$ posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ (povoleno $t = 0$). Tato posloupnost je

- sled délky $t$, pokud $\forall i \in [t]$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$;
- tah délky $t$, pokud je sled a navíc se v této posloupnosti neopakují hrany; a
- cesta délky $t$, pokud je tah a navíc se neopakují ani vrcholy.

# Sled, tah a cesta a definice souvislosti

## Definice

Mějme v grafu $G$ posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ (povoleno $t = 0$). Tato posloupnost je

- sled délky $t$, pokud $\forall i \in [t]$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$;
- tah délky $t$, pokud je sled a navíc se v této posloupnosti neopakují hrany; a
- cesta délky $t$, pokud je tah a navíc se neopakují ani vrcholy.

Graf $G = (V, E)$ je souvislý, pokud pro každé dva vrcholy $v_1, v_2 \in V$ existuje cesta v grafu začínající ve $v_1$ a končící ve $v_2$.

# Existence cesty je ekvivalence

**Tvrzení**

*Nechť* $G = (V, E)$ *je graf. Definujme relaci* $\sim$ *na* $V$ *tak, že* $x \sim y$ *pro* $x, y \in V$*, právě když existuje cesta z* $x$ *do* $y$*. Potom* $\sim$ *je ekvivalence.*

# Existence cesty je ekvivalence

**Tvrzení**

*Nechť* $G = (V, E)$ *je graf. Definujme relaci* $\sim$ *na* $V$ *tak, že* $x \sim y$ *pro* $x, y \in V$*, právě když existuje cesta z* $x$ *do* $y$*. Potom* $\sim$ *je ekvivalence.*

**Důkaz.**

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.

# Existence cesty je ekvivalence

**Tvrzení**

*Nechť $G = (V, E)$ je graf. Definujme relaci $\sim$ na $V$ tak, že $x \sim y$ pro $x, y \in V$, právě když existuje cesta z $x$ do $y$. Potom $\sim$ je ekvivalence.*

**Důkaz.**

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.
- Symetrie: Nechť $x \sim y$. Je-li $(x = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t = y)$ cesta z $x$ do $y$, potom $(v_t, e_t, \ldots, e_1, v_0)$ je cesta z $y$ do $x$. Tedy $y \sim x$.

# Existence cesty je ekvivalence

## Tvrzení

*Nechť $G = (V, E)$ je graf. Definujme relaci $\sim$ na $V$ tak, že $x \sim y$ pro $x, y \in V$, právě když existuje cesta z $x$ do $y$. Potom $\sim$ je ekvivalence.*

## Důkaz.

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.
- Symetrie: Nechť $x \sim y$. Je-li $(x = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t = y)$ cesta z $x$ do $y$, potom $(v_t, e_t, \ldots, e_1, v_0)$ je cesta z $y$ do $x$. Tedy $y \sim x$.
- Tranzitivita: Předpokládejme $x \sim y$ a $y \sim z$. Chceme $x \sim z$.

# Existence cesty je ekvivalence

## Tvrzení

*Nechť $G = (V, E)$ je graf. Definujme relaci $\sim$ na $V$ tak, že $x \sim y$ pro $x, y \in V$, právě když existuje cesta z $x$ do $y$. Potom $\sim$ je ekvivalence.*

## Důkaz.

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.
- Symetrie: Nechť $x \sim y$. Je-li $(x = v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t = y)$ cesta z $x$ do $y$, potom $(v_t, e_t, \dots, e_1, v_0)$ je cesta z $y$ do $x$. Tedy $y \sim x$.
- Tranzitivita: Předpokládejme $x \sim y$ a $y \sim z$. Chceme $x \sim z$.
  - Složením cesty z $x$ do $y$ a z $y$ do $z$ dostaneme sled(!) z $x$ do $z$.

# Existence cesty je ekvivalence

## Tvrzení

*Nechť* $G = (V, E)$ *je graf. Definujme relaci* $\sim$ *na* $V$ *tak, že* $x \sim y$ *pro* $x, y \in V$*, právě když existuje cesta z* $x$ *do* $y$*. Potom* $\sim$ *je ekvivalence.*

## Důkaz.

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.
- Symetrie: Nechť $x \sim y$. Je-li $(x = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t = y)$ cesta z $x$ do $y$, potom $(v_t, e_t, \ldots, e_1, v_0)$ je cesta z $y$ do $x$. Tedy $y \sim x$.
- Tranzitivita: Předpokládejme $x \sim y$ a $y \sim z$. Chceme $x \sim z$.
  - Složením cesty z $x$ do $y$ a z $y$ do $z$ dostaneme sled(!) z $x$ do $z$.
  - Tedy existuje sled z $x$ do $z$.

# Existence cesty je ekvivalence

## Tvrzení

*Nechť $G = (V, E)$ je graf. Definujme relaci $\sim$ na $V$ tak, že $x \sim y$ pro $x, y \in V$, právě když existuje cesta z $x$ do $y$. Potom $\sim$ je ekvivalence.*

## Důkaz.

- Reflexivita: $x \sim x$, stačí volit cestu $(x)$ délky 0.
- Symetrie: Nechť $x \sim y$. Je-li $(x = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t = y)$ cesta z $x$ do $y$, potom $(v_t, e_t, \ldots, e_1, v_0)$ je cesta z $y$ do $x$. Tedy $y \sim x$.
- Tranzitivita: Předpokládejme $x \sim y$ a $y \sim z$. Chceme $x \sim z$.
  - Složením cesty z $x$ do $y$ a z $y$ do $z$ dostaneme sled(!) z $x$ do $z$.
  - Tedy existuje sled z $x$ do $z$.
  - Nejkratší sled z $x$ do $z$ je cesta. (Kdyby se nějaký vrchol $w$ opakoval, tak úsek mezi opakováními lze vynechat a tím sled zkrátit.)
    Schématicky: $(x, A, w, B, w, C, z) \to (x, A, w, C, z)$. $\square$

# Komponenty souvislosti

**Definice**

Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$.

# Komponenty souvislosti

## Definice

Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$.

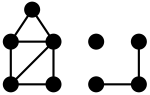
- Komponentu souvislosti $C \subseteq V(G)$ obvykle ztotožňujeme s příslušným indukovaným podgrafem $G[C]$.

# Komponenty souvislosti

## Definice

Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$.

- Komponentu souvislosti $C \subseteq V(G)$ obvykle ztotožňujeme s příslušným indukovaným podgrafem $G[C]$.



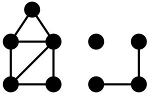
graf se 3 komponentami souvislosti

# Komponenty souvislosti

## Definice

Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$.

- Komponentu souvislosti $C \subseteq V(G)$ obvykle ztotožňujeme s příslušným indukovaným podgrafem $G[C]$.



graf se 3 komponentami souvislosti

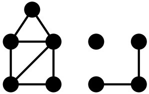
- Pozorování graf je souvislý, právě když má nejvýš jednu komponentu souvislosti.

# Komponenty souvislosti

## Definice

Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti grafu $G$.

- Komponentu souvislosti $C \subseteq V(G)$ obvykle ztotožňujeme s příslušným indukovaným podgrafem $G[C]$.



graf se 3 komponentami souvislosti

- Pozorování graf je souvislý, právě když má nejvýš jednu komponentu souvislosti.
- Varování: Podle naší definice prázdný graf $(\emptyset, \emptyset)$ je souvislý, ale názory se v literatuře různí.