Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Příklad

- Mějme $r = 3$, $s = 4$, potom $(r-1)(s-1)+1 = 7$

Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Příklad

- Mějme $r = 3$, $s = 4$, potom $(r-1)(s-1)+1 = 7$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 8$

Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Příklad

- Mějme $r = 3$, $s = 4$, potom $(r-1)(s-1)+1 = 7$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 8$ podposloupnost: $12, 11, 9, 8$

Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Příklad

- Mějme $r = 3$, $s = 4$, potom $(r-1)(s-1)+1 = 7$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 8$ podposloupnost: $12, 11, 9, 8$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 10$

Erdős-Szekeresova věta o monotónní posloupnosti

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Příklad

- Mějme $r = 3$, $s = 4$, potom $(r-1)(s-1)+1 = 7$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 8$ podposloupnost: $12, 11, 9, 8$
- $7, 6, 12, 11, 4, 9, 10$ podposloupnost: $6, 9, 10$

První důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 1.

- Máme posloupnost $x_1, \ldots, x_t$, kde $t \geq (r-1)(s-1)+1$.

První důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 1.

- Máme posloupnost $x_1, \dots, x_t$, kde $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Uvážíme částečně uspořádanou množinu $P = ([t], \preceq)$, kde $i \prec j$, pokud $i < j$ a $x_i < x_j$.

První důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 1.

- Máme posloupnost $x_1, \ldots, x_t$, kde $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Uvážíme částečně uspořádanou množinu $P = ([t], \preceq)$, kde $i \prec j$, pokud $i < j$ a $x_i < x_j$.
- Rostoucí podposloupnost = řetězec v P.

První důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 1.

- Máme posloupnost $x_1, \ldots, x_t$, kde $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Uvážíme částečně uspořádanou množinu $P = ([t], \preceq)$, kde $i \prec j$, pokud $i < j$ a $x_i < x_j$.
- Rostoucí podposloupnost = řetězec v P.
- Klesající podposloupnost = antiřetězec v P.
- Pokud P neobsahuje ani rostoucí podposloupnost délky r ani klesající délky s, pak podle věty o dlouhém a širokém $|[t]| \leq (r-1)(s-1)$.

První důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 1.

- Máme posloupnost $x_1, \ldots, x_t$, kde $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Uvážíme částečně uspořádanou množinu $P = ([t], \preceq)$, kde $i \prec j$, pokud $i < j$ a $x_i < x_j$.
- Rostoucí podposloupnost = řetězec v P.
- Klesající podposloupnost = antiřetězec v P.
- Pokud P neobsahuje ani rostoucí podposloupnost délky r ani klesající délky s, pak podle věty o dlouhém a širokém $|[t]| \leq (r-1)(s-1)$.
- Spor, neboť $|[t]| = t \geq (r-1)(s-1)+1$. $\square$

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.
- Nechť b_i je max. délka klesající podposloupnosti končící v x_i.

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.
- Nechť b_i je max. délka klesající podposloupnosti končící v x_i.
- Rozmyslíme si, že pro $i \neq j$ máme $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$:

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.
- Nechť b_i je max. délka klesající podposloupnosti končící v x_i.
- Rozmyslíme si, že pro $i \neq j$ máme $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$:
- BÚNO $i < j$. Pokud $x_j > x_i$, potom $a_j \geq a_i + 1$, jinak $b_j \geq b_j + 1$.

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.
- Nechť b_i je max. délka klesající podposloupnosti končící v x_i.
- Rozmyslíme si, že pro $i \neq j$ máme $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$:
- BÚNO $i < j$. Pokud $x_j > x_i$, potom $a_j \geq a_i + 1$, jinak $b_j \geq b_j + 1$.
- Dvojic (a_i, b_i) takových, že $1 \leq a_i \leq r-1$ a $1 \leq b_i \leq s-1$ je pouze $(r-1)(s-1)$.

Druhý důkaz

Věta (Erdős-Szekeresova věta)

Nechť r a s jsou přirozená čísla. Potom každá posloupnost různých reálných čísel délky alespoň $(r-1)(s-1)+1$ obsahuje buď rostoucí podposloupnost délky r nebo klesající podposloupnost délky s.

Důkaz 2.

- Opět posloupnost označíme $x_1, \ldots, x_t$ s $t \geq (r-1)(s-1)+1$.
- Nechť a_i je max. délka rostoucí podposloupnosti končící v x_i.
- Nechť b_i je max. délka klesající podposloupnosti končící v x_i.
- Rozmyslíme si, že pro $i \neq j$ máme $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$:
- BÚNO $i < j$. Pokud $x_j > x_i$, potom $a_j \geq a_i + 1$, jinak $b_j \geq b_j + 1$.
- Dvojic (a_i, b_i) takových, že $1 \leq a_i \leq r-1$ a $1 \leq b_i \leq s-1$ je pouze $(r-1)(s-1)$.
- Tedy pro nějaké i platí $a_i \geq r$ nebo $b_i \geq s$. □

Platónská tělesa (nezkouší se)

Definice

Platónské těleso (též pravidelný mnohostěn) je konvexní mnohostěn, který má všechny stěny navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a u každého vrcholu se stýká stejný počet těchto mnohoúhelníků.

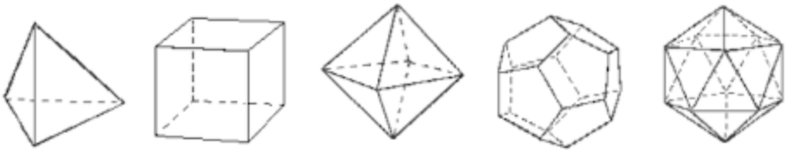
Platónská tělesa (nezkouší se)

Definice

Platónské těleso (též pravidelný mnohostěn) je konvexní mnohostěn, který má všechny stěny navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a u každého vrcholu se stýká stejný počet těchto mnohoúhelníků.

- Konvexní mnohostěn nebudeme definovat úplně přesně.

Příklady:



- Budeme chtít ukázat, že žádné jiné neexistuje.

Mnohostěny a rovinnost

- Je-li M konvexní mnohostěn, potom vrcholy a hrany M tvoří rovinný graf $G(M)$.

Mnohostěny a rovinnost

- Je-li M konvexní mnohostěn, potom vrcholy a hrany M tvoří rovinný graf $G(M)$.
- Důkaz (náznak) obrázkem (pouze na přednášce):

- Je-li M platónské těleso, potom všechny vrcholy $G(M)$ mají stejný stupeň a všechny stěny $G(M)$ mají stejný stupeň.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.
- Podle principu sudosti $2m = \sum_{v \in V(G(M))} \deg v = nd$.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.
- Podle principu sudosti $2m = \sum_{v \in V(G(M))} \deg v = nd$.
- Podle principu sudostu pro stěny $2m = \sum_f \deg f = ks$.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.
- Podle principu sudosti $2m = \sum_{v \in V(G(M))} \deg v = nd$.
- Podle principu sudostu pro stěny $2m = \sum_f \deg f = ks$.
- Eulerova formule: $n - m + s = 2$.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.
- Podle principu sudosti $2m = \sum_{v \in V(G(M))} \deg v = nd$.
- Podle principu sudostu pro stěny $2m = \sum_f \deg f = ks$.
- Eulerova formule: $n - m + s = 2$.
- Dosazením: $n - \frac{nd}{2} + \frac{nd}{k} = 2$.

Možná platónská tělesa

- Najdeme všechna možná platónská tělesa.
- Označme v $G(M)$:
  - n počet vrcholů;
  - m počet hran;
  - s počet stěn;
  - d společný stupeň všech vrcholů, $d \geq 3$;
  - k společný stupeň všech stěn; $k \geq 3$.
- Podle principu sudosti $2m = \sum_{v \in V(G(M))} \deg v = nd$.
- Podle principu sudostu pro stěny $2m = \sum_f \deg f = ks$.
- Eulerova formule: $n - m + s = 2$.
- Dosazením: $n - \frac{nd}{2} + \frac{nd}{k} = 2$.
- Odtud $n(2k - kd + 2d) = 4k$.
- Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně ≤ 5, tedy $d \in \{3, 4, 5\}$.

Možná platónská tělesa–pokračování

- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.

Možná platónská tělesa–pokračování

- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 3$:
  - Máme $n(6 - k) = 4k$ z (**).

Možná platónská tělesa–pokračování

- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 3$:
  - Máme $n(6 - k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k \leq 5$, tedy $k \in \{3, 4, 5\}$.

Možná platónská tělesa–pokračování

- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 3$:
  - Máme $n(6 - k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k \leq 5$, tedy $k \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 4$:
  - Máme $n(8 - 2k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.
- Je-li $d = 5$:
  - Máme $n(10 - 3k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.

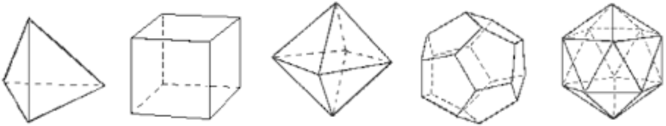
Možná platónská tělesa–pokračování

- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 3$:
  - Máme $n(6 - k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k \leq 5$, tedy $k \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 4$:
  - Máme $n(8 - 2k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.
- Je-li $d = 5$:
  - Máme $n(10 - 3k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.
- Celkově $(d, k) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$.

Možná platónská tělesa–pokračování

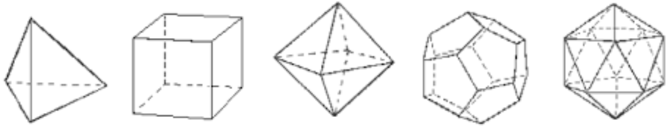
- Z minulého slajdu:
  - $nd = 2m = ks$ (*),
  - $n(2k - kd + 2d) = 4k$ (**),
  - $d \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 3$:
  - Máme $n(6 - k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k \leq 5$, tedy $k \in \{3, 4, 5\}$.
- Je-li $d = 4$:
  - Máme $n(8 - 2k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.
- Je-li $d = 5$:
  - Máme $n(10 - 3k) = 4k$ z (**).
  - Aby levá strana byla kladná, máme $k = 3$.
- Celkově $(d, k) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$.
- Z (**) dopočteme n a poté z (*) dopočteme m a následně s.

Výčet možností



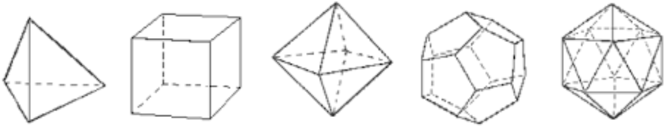
- $(d, k) = (3, 3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.

Výčet možností



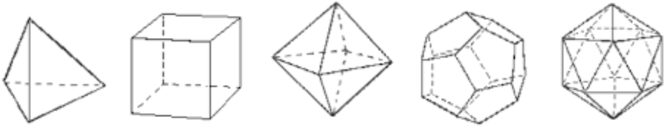
- $(d, k) = (3, 3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.
- $(d, k) = (3, 4)$, $n = 8, m = 12, s = 6$. Vede na krychli.

Výčet možností



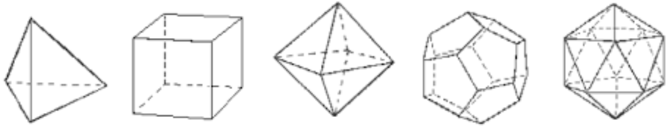
- $(d,k) = (3,3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.
- $(d,k) = (3,4)$, $n = 8, m = 12, s = 6$. Vede na krychli.
- $(d,k) = (3,5)$, $n = 20, m = 30, s = 12$. Vede na pravdielný dvanáctistěn.

Výčet možností



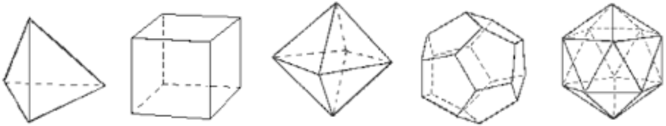
- $(d,k) = (3,3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.
- $(d,k) = (3,4)$, $n = 8, m = 12, s = 6$. Vede na krychli.
- $(d,k) = (3,5)$, $n = 20, m = 30, s = 12$. Vede na pravdielný dvanáctistěn.
- $(d,k) = (4,3)$, $n = 6, m = 12, s = 8$. Vede na pravidelný osmistěn.

Výčet možností



- $(d, k) = (3, 3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.
- $(d, k) = (3, 4)$, $n = 8, m = 12, s = 6$. Vede na krychli.
- $(d, k) = (3, 5)$, $n = 20, m = 30, s = 12$. Vede na pravdielný dvanáctistěn.
- $(d, k) = (4, 3)$, $n = 6, m = 12, s = 8$. Vede na pravidelný osmistěn.
- $(d, k) = (5, 3)$, $n = 12, m = 30, s = 20$. Vede na pravdielný dvacetistěn.

Výčet možností



- $(d, k) = (3, 3)$, $n = 4, m = 6, s = 4$. Vede na pravidelný čtyřstěn.
- $(d, k) = (3, 4)$, $n = 8, m = 12, s = 6$. Vede na krychli.
- $(d, k) = (3, 5)$, $n = 20, m = 30, s = 12$. Vede na pravdielný dvanáctistěn.
- $(d, k) = (4, 3)$, $n = 6, m = 12, s = 8$. Vede na pravidelný osmistěn.
- $(d, k) = (5, 3)$, $n = 12, m = 30, s = 20$. Vede na pravdielný dvacetistěn.
- Ještě zbývá si rozmyslet, že pokud známe d, k, n, m, s, tak je těleso už jednoznačně určené (pouze náznak).