NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Další metody řešení LP

6. 4. 2012, 7. přednáška *Zapsal: Viktorie Vášová, Tobiáš Potoček*
Poslední změna: 16. června 2012

1 Simplexová metoda

Hledání výchozí báze Máme úlohu v rovnicovém tvaru:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & c^T x \\ \text{pro} \quad & x \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

a dále předpokládáme, že $b \geq 0$ a $\operatorname{rank}(A) = m$. Nyní si vytvoříme pomocnou úlohu, kdy $\bar{A} = (A|I_m)$:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & x_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \\ \text{pro} \quad & \bar{x} \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & \bar{A}\bar{x} = b \end{aligned}$$

Počáteční báze je $\{n+1, \ldots n+m\}$, řešení je přípustné.

Pokud je optimum pomocné úlohy větší než 0, pak neexistuje přípustné řešení. Pokud je optimum rovné nule, tak máme přípustné řešení pomocné úlohy. Dále najdeme bázi přípustnou bázi původní úlohy (v degenerovaném případě).

Rychlost simplexové metody

- Existují příklady, kdy simplexová metoda provede 2^n pivotovacích kroků pro většinu pivotovacích pravidel.
- Pro náhodný výběr vstupující proměnné stačí v průměru $e^{\mathcal{O}(\sqrt{n \cdot \log(n)})}$ pivotovacích kroků.
- Pokud půjdeme k optimu po nejkratší cestě ze sousedních vrcholů, stačí $n^{\mathcal{O}\left(\log(n)\right)}$ pivotovacích kroků.

Lemma 1. Hirschova domněnka *Nejkratší cesta v grafu mnohostěnu má délku* $(n+m)^{\mathcal{O}(1)} = poly(n+m)$.

Praxe: Typicky $\mathcal{O}(n^2)$ pivotovacích kroků.

Smooth analysis: Pokud trochu náhodně změníme b, tak s velkou pravděpodobností simplexová metoda běží v polynomiálním čase.

2 Elipsoidová metoda

Pracuje v čase $poly(n, m, \text{počet bitů v } A, b)$. Hledá přípustné řešení. Udržuje elipsoid, který obsahuje mnohostěn přípustného řešení.

$Ax = b$, $x \geq 0$. Bázické řešení lze zapsat polynomiálním počtem bitů a je řešením soustavy rovnic s koeficienty z A. Determinant matice s čísly $\leq K = 2^\beta$, proto počet bitů je $\leq n^n \cdot K^n = 2^{n \cdot \log(n) + \beta \cdot n}$.

$P = \{x \mid Ax \leq b\}$, $\bar{P} = \{x \mid Ax \leq b + \varepsilon\}$ a dá se ukázat, že $P \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{P}$ obsahuje kouli o poloměru ε pro vhodné ε.

Postup:

- Najdeme velkou kouli obsahující přípustné řešení, pokud existuje.
- Opakujeme.
- TODO obrázek
- Pokud je střed přípustné řešení $\Rightarrow$ konec. Jinak nalezneme porušenou podmínku a nový menší elipsoid.
- Dále nám stačí orákulum (podprogram) pro rozhodování přípustnosti: buď potvrdí, že x je přípustné, nebo vrátí porušenou podmínku. Pozn.: Orákulum někdy existuje i pro velké soustavy nerovnic a někdy i pro nekonečné soustavy. $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{pmatrix}$, kde X je symetrická pozitivně semidefinitní matice.

3 Metody vnitřního bodu

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & c^T x + \mu \cdot ln(\text{vzdálenost od stěny}) \\ \text{pro} \quad & x \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

4 Totální unimodularita

Definice 2. Matice A je **totálně unimodulární**, pokud determinant každé čtvercové podmatice je 0, 1 nebo -1.

Věta 3. *Nechť A je totálně unimodulární a $b \in \mathbb{Z}^m$. Pak mnohostěn $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ má všechny vrcholy celočíselné.*

Důkaz. Vrchol je $A_B^{-1} \cdot b$ pro nějakou bázi B. A_B^{-1} je celočíselné podle Kramerova pravidla. Tedy $A_B^{-1} \cdot b$ je celočíselné. □

Pozorování 4. *Totální unimodularita se zachovává při transpozici, přidání řádku* $\begin{pmatrix}1, & 0, & \cdots & 0\end{pmatrix}$ *či sloupce* $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$*, dále permutací řádků nebo sloupců, vynásobením řádku* ± 1 *nebo pivotovacím krokem.*

Věta 5. *Nechť* A *má v každém sloupci maximálně* 2 *prvky* $\{1, -1\}$ *a ostatní nuly a navíc sloupcové součty jsou* 1*,* -1*,* 0*. Pak* A *je totálně unimodulární.*

Důkaz. Sporem: Vezmeme nejmenší podmatici A' s $\det(A') \notin \{-1, 0, 1\}$. A' má v každém sloupci jak -1 tak $+1$. Pak jsou řádky lineárně závislé $\Rightarrow \det(A')$, spor. $\square$

Věta 6. *Nechť* A *má maximálně* 2 *nenulové prvky ve sloupci. Pak* A *je totálně unimodulární* $\Leftrightarrow$ *vynásobením některých řádků* -1 *dostaneme tvar z předchozí věty.*