NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012	Jiří Sgall
Maximální párování minimální ceny v obecných grafech	
4. 5. 2012, 11. přednáška	*Zapsal: Pavel Pilař, Marek Tlustý*
Poslední změna: 16. června 2012	

1 Perfektní bipartitní párování minimální ceny

LP:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & \sum c_e \cdot x_e \\ \text{pro} \quad & (\forall e) x_e \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & (\forall v) x(\delta(v)) = \sum_{e \ni v} x_e = 1 \end{aligned}$$

Duální LP:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{pro} \quad & y_v \in \mathbb{R} \\ \text{za podmínek} \quad & \forall e = \{u, v\} \in E : y_u + y_v \leq c_e \end{aligned}$$

Komplementarita: $x_{uv} > 0 \implies y_u + y_v = c_{uv}$
$E_= = \{\{u, v\} \in E \mid y_u + y_v = c_{uv}\}$, $M \subseteq E_=$, M je perfektní $\rightarrow$ optimum

Střídavý strom $|B(T)| = |A(T)| + 1$
TODO obrázek

Algoritmus

(i) $y \equiv 0$, $M = \emptyset$

(ii) r nespárovaný v M
$T = \{\{r\}, \emptyset\}$
$T, M \subseteq E_=$
pokud r neexistuje $\rightarrow$ M je perfektní $\rightarrow$ optimum

(iii) Nechť $\exists e = \{v, w\} \in E_=$, $v \in B(T)$, $w \notin T$ $\rightarrow$ budujeme M, T

(iv)

$$y_v := \begin{cases} y_v + \epsilon & v \in B(T) \\ y_v - \epsilon & v \in A(T) \\ y_v & v \notin T \end{cases}$$

kde $\epsilon = min\{c_{vw} - y_v - y_w \mid v, w \in E, v \in B(T), w \notin T\}$
Pokud $\epsilon = \infty \rightarrow$ neexistuje perfektní párování.
goto(3)

Věta 1. *Algoritmus nalezne optimální párování v polynomiálním čase.*

2 Perfektní párování v obecných grafech

Mějme G' .. G multigraf s kontrahovanými lichými cykly.

Definice 2. G/C .. ztotožníme vrcholy C do nového pseudovrcholu z, hrany $\{u, v\}$, $u, v \in C$ vynecháme a hrany $\{u, v\}$, $u \in C$, $v \notin C$ nahradíme $\{z, v\}$.

Pozorování 3. *Nechť C lichý cyklus, M' perfektní párování v G/C. Pak existuje $M \supseteq M'$ perfektní párování v G.*

Blossom algorithm

(i) $M = \emptyset$, $G' = G$

(ii) r nespárovaný $\to$ nový T (když neexistuje $\to$ párování)

(iii) $\{u, v\} \in E$, $u \in B(T)$, $v \notin T$ $\to$ zvětšíme M nebo T

(iv) $\{u, v\} \in E$, $u, v \in B(T)$
P_u, P_v jsou cesty v T ke společnému předchůdci
$C = P_u \cup P_v \cup \{\{u, v\}\}$
$G' = G'/C$, $T = T/C$, $M = M/C$

Lze naimplementovat v čase $\mathcal{O}(n \cdot m)$.
TODO obrázek

2.1 Perfektní párování minimální ceny v obecném grafu

Definice 4. $D \subseteq E$ je **lichý řez**, pokud $D = \delta(S)$ pro nějaké $S \subseteq V$, $|S|$ je lichá.

LP:

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & \sum c_e \cdot x_e \\ \text{pro} & x_e \geq 0 \\ \text{za podmínek} & \begin{array}{rccl} (\forall v \in V) & x(\delta(v)) & = 1 & \ldots y_v \\ (\forall D \text{ lichý řez}) & x(D) & \geq 1 & \ldots Y_D \end{array} \end{array}$$

Duální LP:

$$\begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & \sum\limits_{v \in V} y_v + \sum\limits_{\text{D je lichý řez}} Y_D \\ \text{pro} & y_v, Y_D \in \mathbb{R} \\ \text{za podmínek} & (\forall u, v \in E) y_u + y_v + \sum\limits_{D \ni uv} Y_D \leq c_{uv} \wedge (\forall D) Y_D \geq 0 \end{array}$$

Definice 5. Redukovaná cena $\bar{c}_e = c_e - y_u - y_v - \sum Y_D$, kde $e \in \{u, v\}$

Komplementarita:

(i) $e \in M \implies \bar{c}_e = 0$

(ii) $Y_D > 0 \implies |M \cap D| = 1$

$E_= = \{e \in E \mid \bar{c}_e = 0\}$ hledáme $M, T \subseteq E_=$
Pracujeme v G' s kontrahovanými cykly, $u \in G'$ pseudovrchol, máme podmínku $y_u \geq 0$.

Algoritmus

(i) $y \equiv 0$, $M = \emptyset$, $G' = G$

(ii) r nespárovaný v M
$T = \{\{r\}, \emptyset\}$
$T, M \subseteq E_=$
pokud r neexistuje $\to$ M je perfektní $\to$ optimum

(iii) Nechť $\exists e = \{v, w\} \in E_=$, $v \in B(T)$, $w \notin T$ $\to$ budujeme M, T

(iv) $\{u, v\} \in E_=$: $u, v \in B(T)$: $C = P_u \cup P_v \cup \{u, v\}$
$G' = G'/C$ nový pseudovrchol $z \in B(T)$ .. sudá vzdálenost od kořene
nová duální proměnná y_z s podmínkou $y_z \geq 0$
$y_z = 0$
$(\forall e) e = \{a, b\}$, $a \in C$, $b \notin C$, $c_e = c_e - y_a$

(v) $z \in A(T)$ je pseudovrchol, $y_z = 0$
expandujeme z na cyklus C
do T a M přidáme sudou cestu z C
$(\forall e) e = \{a, b\}$, $a \in C$, $b \notin C$, $c_{ab} = c_{ab} + y_a$