NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Aplikace duality

27. 4. 2012, 10. přednáška *Zapsal: Viktorie Vášová, Ondřej Štumpf*
Poslední změna: 16. června 2012

1 Párování v bipartitním grafu

Vstup: $G = (V, E)$
Výstup: $M \subseteq E$, $(\forall v \in V) deg_v(M) \leq 1$
Cíl: $max|M|$
LP:

$$\begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{pro} & \forall e \in E : x_e \geq 0 \ (\in \{0,1\}) \\ \text{za podmínek} & (\forall v \in V) \sum_{e \ni v} x_e \leq 1 \ (\leq \omega_v \leftarrow \text{cena vrcholu } v) \end{array}$$

Pokud máme přípustné řešení $x \in \{0,1\}^{|E|}$, odpovídá to párování M. Pokud G je bipartitní, víme, že A (jeho matice incidence) je totálně unimodulární.

Z toho vyplývá, že LP má celočíselné optimální řešení a tedy LP má $\{0,1\}^{|E|}$ optimální řešení (ze struktury LP).

Duální LP:

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & \sum_{v \in V} y_v \ (\sum y_v \cdot \omega_v \leftarrow \text{pokud nás zajímá cena}) \\ \text{pro} & \forall v \in V : y_v \geq 0 \\ \text{za podmínek} & (\forall e = \{u,v\} \in E) y_u + y_v \geq 1 \end{array}$$

Přípustné řešení $y \in \{0,1\}^{|V|}$ odpovídá vrcholovému pokrytí grafu ($C \subseteq V$ tak, že $(\forall e \in E) e \cap c \neq \emptyset$).

Věta 1 (Königova)**.** *V bipartitním grafu $G = (V, E)$ platí: $max\{|M| : M$ je párování$\} = min\{|C| : C$ je vrcholové pokrytí $G\}$.*

Důkaz. Z duality:
$\leq$: Zřejmé – platí i pro obecné grafy.
$\geq$: Neplatí pro obecné grafy. Např: $|M| \leq 1$ a $|C| \geq 2$.

□

Z komplementarity: pro optimální M a C platí:
$(\forall e) e \in M \implies |e \cap c| = 1$
$(\forall v) v \in C \implies (\exists e \in M) v \in e$.

2 Toky v sítích

Vstup: $G = (V, E)$ orientovaný graf, $(\forall e) : c(e) \geq 0$ kapacity hran, $s, t \in V$ zdroj a stok.
Cíl: Maximální tok z s do t.
LP: x_e je tok hranou $e \in E$, přebytek ve vrcholu:

$$f_x(v) = \sum_{\substack{w \in V \\ (w,v) \in E}} x_{wv} - \sum_{\substack{w \in V \\ (v,w) \in E}} x_{vw}$$

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & f_x(t) \\ \text{pro} \quad & 0 \leq x_0 \leq c(e) \\ \text{za podmínek} \quad & f_x(v) = 0 (\forall v) \neq s, t \end{aligned}$$

To je ale moc složité – zjednodušíme přidáním hrany (t, s) nekonečné kapacity.
LP2:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & x_{ts} \\ \text{pro} \quad & x_e \leq c(e) (\forall e \in E) \\ \text{za podmínek} \quad & f_x(v) = 0 (\forall v), x_e \geq 0 \end{aligned}$$

Tok cirkuluje – měříme kolik teče na umělé hraně (t, s)..
Duál LP:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & \sum_{e \in E} c(e) \cdot z_e \\ \text{pro} \quad & y_v \in \mathbb{R} (\forall v \in V) \wedge z_e \geq 0 (\forall e \in E) \\ \text{za podmínek} \quad & (\forall e = (u, v) \in E) : -y_u + y_v + z_{uv} \geq 0 \wedge -y_t + y_s \geq 1 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ incidenční matice lineárního programu je totálně unimodulární.

Věta 2. *Pokud $c(e)$ jsou celočíselné, tak existuje celočíselný maximální tok.*

Důkaz. Matice lineárního programu je totálně unimodulární. □

Jaký je kombinatorický význam duálu? $U := \{v \mid y_v > y_t\} \to z \in U$, $t \notin U$.

- Duálně přípustné y odpovídá tomu, že U je řez oddělující s a t. Cena řezu

$$U = c(U) := \sum_{e \in E \cap (U \times (V \setminus U))} c(e).$$

- $(u, v) = e \in E \cap (U \times (V \setminus U))$: $y_u \geq y_v + 1 \wedge z_e \geq 1$
- $\sum c(e) \cdot z_e \geq c(U)$
- Optimum duálního lineárního programu odpovídá ceně minimálního řezu.

Věta 3. *Cena minimálního řezu se rovná velikosti maximálního toku.*

3 Perfektní bipartitní párování minimální ceny

Vstup: $G = (V, E)$ bipartitní, $c(e) \geq 0$
Výstup: $M \subseteq E$, $(\forall v) deg_v(M) \leq 1$
Cíl: $min \sum_{e \in M} c(e)$
LP: $x_e \geq 0 (\forall e \in E)$, $(\forall v) \delta(v) = \{e \in E \mid v \in e\}$, $D \subseteq E : x(D) = \sum_{e \in D} x_e$

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & \sum_{e \in E} c(e) \cdot x_e \\ \text{pro} \quad & x_e \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x(\delta(v)) = \sum_{e \ni v} x_e = 1 \end{aligned}$$

Duální LP:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & \sum y_v \\ \text{pro} \quad & y_v \in \mathbb{R} \\ \text{za podmínek} \quad & \forall e = \{u, v\} \in E : y_u + y_v \leq c(e) \end{aligned}$$

3.1 Primárně duální algoritmus

Udržujeme párování M (je patrně přípustné řešení LP) a duálně přípustné y. M a y splňují komplementaritu, tj. $x_{uv} \in M \implies y_u + y_v = c(\{u, v\})$. $E_= := \{\{u, v\} \in E \mid y_u + y_v = c(\{u, v\})\}$.

Alternující stromy T je alternující strom, $A(T)$ jsou vrcholy T v liché vzdálenosti od kořene r a $B(T)$ jsou vrcholy T v sudé vzdálenosti od kořene $r \in B(T)$.

Algoritmus

(i) $M := \emptyset$, $y = 0$

(ii) $r :=$ nespárovaný vrchol, pokud r neexistuje $\rightarrow$ konec. $T := \{\{r\}, \emptyset\}$

(iii) Nechť $\{v, w\} \in E_=$, $v \in B(T)$, $w \notin T$
if w: $\{w, z\} \in M \rightarrow$ přidáme $\{w, z\}$ do T, goto 3
if w nespárovaný $\rightarrow$ zvětšíme M pomocí střídavé cesty, goto 2

(iv) to be continued