APROXIMAČNÍ ALGORITMY

Příklad: VRCHOLOVÉ POKRYTÍ (VÁŽENÉ)

VSTUP: $G=(V,E)$, $c: V \to \mathbb{R}_0^+$

VÝSTUP: $A \subseteq V$, tak, že každá $e \in E$ je incidentní s nějakým $v \in A$

CÍL: minimalizovat $\sum_{v \in A} c_v$

<u>Def</u>: Algoritmus A je R-aproximační, pokud pro každou instanci I

$$A(I) \leq R \cdot OPT(I),$$

kde $A(I)$ je cena řešení A na I a $OPT(I)$ je cena optimálního řešení.

$\boxed{V}$ Existuje polynomiální 2-aproximační algoritmus pro vážené vrcholové pokrytí.

<u>Dk</u>: celočíselná formulace:

$$\left.\begin{array}{lll} \min \sum_{v \in V} c_v x_v & & \\ \text{tak, že } (\forall \{u,v\} \in E) & x_u + x_v \geq 1 \\ (\forall v) & x_v \geq 0 \end{array}\right\} LP$$

$$x_v \in \{0,1\}$$

ALG: Spočítá x^* optimální řešení LP

$$\bar{x}_v = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_v^* \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$A := \{u \mid \bar{x}_u = 1\}$$

$\bar{x}$ je přípustné

$$LP(I) \leq OPT(I) \leq ALG(I) \leq 2 \cdot LP(I)$$

$$\sum c_v \bar{x}_v \leq \sum c_v \cdot (2x_v^*) = 2 \cdot LP(I)$$

MATROIDY

<u>Def</u>: Nechť S je konečná, $I \subseteq 2^S$ je systém podmnožin.
(S, I) se nazývá <u>matroid</u> pokud

(1) $\emptyset \in I$

(2) $J' \subseteq J \in I \Rightarrow J' \in I$ (uzavřenost na podmnožiny)

(3) $(\forall A \subseteq S)$ (všechny maximální (na inkluzi) množiny $X \subseteq A, X \in \mathcal{M}$ mají stejnou kardinalitu)

<u>Def</u>: $J \in I$ se nazývá <u>nezávislá množina</u>
Nezávislá množina maximální vzhledem k inkluzi se nazývá <u>báze</u>
Velikost maximální $J \subseteq A$, $J \in \mathcal{M}$ se nazývá rank A a značí $r(A)$.

<u>Příklady</u>:

- Lineárně nezávislé množiny ve vekt. prostoru
- Dán $G = (V, E)$. $S = E$, $F \subseteq E$ je nezávislá pokud F je les.
- Dáno $S = S_1 \dot\cup S_2 \dot\cup \dots \dot\cup S_k$.
  $A \subseteq S$ je nezávislá, pokud $(\forall i)\ |A \cap S_i| \leq 1$

$\boxed{V}$ $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ je systém bází nějakého matroidu, právě když $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a
$(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})\ (\forall a \in B_1 \setminus B_2)\ (\exists b \in B_2 \setminus B_1)\ (B_1 \cup \{b\} \setminus \{a\} \in \mathcal{B})$

<u>Dk</u>: $\Rightarrow$ doplníme $B_1 \setminus \{a\}$ na bázi v $B_1 \cup B_2 \setminus \{a\}$

$\Leftarrow$ vezmeme $I = \{A \mid (\exists B \in \mathcal{B})\ A \subseteq B\}$

HLADOVÝ ALGORITMUS

MAXIMÁLNÍ NEZÁVISLÁ MNOŽINA

VSTUP: Matroid (S, I), $c: S \to \mathbb{R}$

VÝSTUP: $A \in I$

CÍL: maximalizovat $\sum_{e \in S} c_e x_e$

HLADOVÝ ALG:

$A := \emptyset$

Pokud existuje $e \in S$ tak, že $A \cup \{e\} \in I$, a $c_e > 0$

Najdi takové e s maximálním c_e

$A := A \cup \{e\}$

LP formulace: $\max \sum_{e \in S} c_e x_e$

$$x(A) = \sum_{e \in A} x_e \leq r(A) \qquad \forall A \subseteq S$$

$$x_e \geq 0 \qquad \forall e \in S$$

$\boxed{V}$ Hladový alg. najde optimální řešení tohoto LP

Dk: Duální LP: $\min \sum_{A \subseteq S} r(A) y_A$

$$\sum_{\substack{A \subseteq S \\ A \ni e}} y_A \geq c_e \qquad \forall e \in E$$

$$y_A \geq 0 \qquad \forall A \subseteq S$$

Duální řešení: Nechť $c_{e_1} \geq \dots \geq c_{e_m} > 0$ je očíslování hran s $c_e > 0$

$$y_A = \begin{cases} c_{e_i} - c_{e_{i+1}} & \text{pro } A = \{e_1, \dots, e_i\},\ i \leq m-1 \\ c_{e_m} & \text{pro } A = \{e_1, \dots, e_m\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Ověříme podle v. o komplementaritě

$x_e > 0 \Rightarrow \sum_{A \ni e} y_A = c_e$ – z def. y_A a $e \in \{e_1, \dots, e_m\}$

$y_A > 0 \Rightarrow x(A) = r(A)$ – z postupu hladového algoritmu

POLYTOP MATROIDU, PRŮNIK MATROIDŮ

$\boxed{V}$ Polytop matroidu (S, I) daný nerovnostmi

$$x(A) \le r(A) \quad \forall A \subseteq S$$
$$x_e \ge 0 \quad \forall e \in S$$

je celočíselný.

Dk: Z analýzy hladového algoritmu.

$\boxed{V}$ Nechť $G=(V,E)$ je souvislý graf. Pak konvexní obal charakteristických vektorů koster G je polytop daný nerovnostmi $\sum_{e \in V} x_e = |V|-1$

$$x(\gamma(T)) \le |T|-1 \quad (\forall T)(\emptyset \ne T \subseteq V)$$
$$x_e \ge 0$$

Dk: Použití předchozí věty na matroid lesů v G

$\boxed{V}$ Nechť (S, I_1), (S, I_2) jsou dva matroidy.
Pak konvexní obal charakteristických vektorů v $I_1 \cap I_2$ je polytop daný nerovnostmi

$$x(A) \le r_1(A) \quad \forall A \subseteq S$$
$$x(A) \le r_2(A) \quad \forall A \subseteq S$$
$$x_e \ge 0 \quad \forall e \in S.$$

Tedy průnik polytopů dvou matroidů je celočíselný.

Pozn: Existuje algoritmická verze.
Ta zobecňuje hledání párování v bipartitním grafu