POLYTOPY PÁROVÁNÍ

Def: Polytop perfektních párování G je konvexní obal všech charakteristických vrcholů perfektních párování

$\boxed{V}$ Polytop perf. p. G je roven polytopu def. podmínkami (1), (2), (3) a také (1), (2), (4):

$$x_e \geq 0 \qquad \forall e \in E \qquad (1)$$

$$x(\delta(v)) = 1 \qquad \forall v \in E \qquad (2)$$

$$x(\delta(S)) \geq 1 \qquad \forall S \subseteq V,\ |S| \text{ liché} \qquad (3)$$

(ekviv.: $x(D) \geq 1$ $\forall$ lichý řez)

$$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \subseteq V,\ |S| \text{ liché} \qquad (4)$$

$$\gamma(S) = E \cap \binom{S}{2}$$

Dk: (4) $\Leftrightarrow$ (3) (při platnosti (2))

Perf. párování splňují LP

Nechť $\bar{x}$ není v polytopu perf. párování.

Pak ex. váhy w_e a t tak, že

$$\sum w_e \bar{x}_e < t$$

$$\sum w_e x_e \geq t \qquad \text{pro každé perf. párování}$$

Alg. pro perf. párování najde min. $\sum w_e x_e$ + duální řešení, dokazující, že (1)–(3) $\Rightarrow \sum w_e x_e \geq t$

<u>Def</u>: Polytop zlomkových párování G je def. nerovnostmi (1) a (2)

$\boxed{V}$ x z polytopu zlomkových p. je vrchol $\Leftrightarrow$

$(\forall e)\ x_e \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ a hrany e s $x_e = \frac{1}{2}$ tvoří disj. liché cykly

<u>Dk</u>: $\Leftarrow$ definujme váhy $w_e = \begin{cases} 0 & x_e = 0 \\ 1 & x_e > 0 \end{cases}$

x je jediné tak, že $\sum w_e x_e \geq \frac{n}{2}$

$\Rightarrow$ definujme G' tak, že V' má dvě kopie $v'v''$ každého vrcholu v

E' má dvě kopie $v'w''$ $v''w'$ každé hrany

x v $G \rightsquigarrow x'$ v G': $x'_{e'} = x'_{e''} = x_e$

x' v $G' \rightsquigarrow x$ v G: $x_e = \frac{1}{2}(x'_{e'} + x'_{e''})$

x v G vrchol: w tak, že $\max w^T x$ má jediné řeš. toto x

w' v G': $w'_{e'} = w'_{e''} = w_e$

x' vrchol v G' maximalizující $w'^T x'$

celočíselný, tedy $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

cykly musí být liché - rotace

STĚNY POLYTOPU PÁROVÁNÍ

<u>Pozor</u>: U perfektního grafu všechny podmínky (3) definují fasety

<u>Def</u>: Polytop párování G je def. nerovnostmi

$$x_e \geq 0 \qquad \forall e$$

$$x(\delta(v)) \leq 1 \qquad \forall v$$

$$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \subset V,\ |S| \text{ liché}$$

<u>Pozor</u>: Polytop párování má dimenzi m

Polytop perfektních párování je jeho stěna

$\boxed{V}$ Minimální popis polytopu párování G je

(1) $x_e \geq 0 \quad \forall e$

(2) $x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v$: $|\delta(v)| \geq 3$

$|\delta(v)| = 2$ a sousedi u v nespojeni hranou

$|\delta(v)| = 1$ a soused je v 2-souvislé komp. (cyklu)

(3) $x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$ $(\forall S \subsetneq V,\ |S| \text{ liché})$

$G|S$ 2-souvislé

$\forall v \in S$ $G|(S \setminus \{v\})$ má perf. párování

<u>Dk</u>: (1) Přímá konstrukce bodu mimo

(2) konstrukce velké množ. afinně nezávislých bodů ve stěně

(3) Maximalita stěny obsahující všechna řeš. rovnosti

\+ ověření, že ostatní podmínky plynou