DUALITA LP

Příklad: $\max x_1 + x_2 + x_3$

tak, že
$$\begin{array}{rl|l} x_1 - x_2 & \le 1 & \cdot y_1 \\ x_2 + x_3 & \le 1 & y_2 \\ 2x_2 - x_3 & \le 1 & \cdot y_3 \\ 2x_2 + x_3 & \le 5 & \cdot y_4 \end{array}$$

$$y_1 x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3 \underset{+2x_2}{)} x_2 + (y_2 - y_3 \underset{+y_4 \cancel{x_2}}{)} x_3 \le y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ je řešení. Jak získáme horní odhad?

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 = y_3 \quad y_4 = 1$ dá $x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{4}{3} \quad y_3 = \frac{1}{3}$ dá $x_1 + x_2 + x_3 \le \frac{8}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{1}{3}$ je optimální řešení

DUÁLNÍ LP: Hledá optimální koeficienty $y_1, \dots, y_m$

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 \\ & y_1 = 1 \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3^{+2y_4} = 1 \\ & y_2 \cancel{+} y_3^{+y_4} = 1 \end{array}$$

OBECNĚ: Duální LP získáme takto: (primární $Ax \le b, \max c^T x$)

Duální Proměnná y_j pro každou $\overset{\text{primární}}{}$ podmínku

$y_j \in \mathbb{R}$ pro podmínku $\sum_i a^T_{ji} x_i \le b_j$

$y_j \ge 0$ $\quad \sum_i a^T_{ji} x_i \le b_j$

D. Podmínka pro každou prim. proměnnou

$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i \qquad x_i \in \mathbb{R}$

$\sum a_{ji} y_j \ge c_i \qquad x_i \ge 0$

a cíl je $\min \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$

Pozorování: Duální LP k duálnímu LP je původní LP.

Důležité případy: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

(P) $\max c^T x$

$Ax \le b$

$x \in \mathbb{R}^n$

(D) $\min b^T y$

$A^T y = c$

$y \geq 0$

$(\overline{P})$ $\max c^T x$

$Ax \le b$

$x \geq 0$

$(\overline{D})$ $\min b^T y$

$A^T y \geq c$

$y \geq 0$

$\boxed{V}$ (Slabá věta o dualitě) Nechť x, y jsou přípustná řešení (P) a (D). Pak $c^T x \le b^T y$

Dk: $y^T A x \le y^T b$ z prim. úlohy (P) a $y \geq 0$

$y^T A x = c^T x$ z duální úlohy (D)

$\boxed{V}$ (O dualitě) Pro úlohy (P) a (D) [nebo $(\overline{P})$ a $(\overline{D})$] nastává jedna z možností:

(1) Ani (P) ani (D) nemá přípustné řešení.

(2) Jedna z nich je neomezená a druhá nemá příp. řešení.

(3) (P) i (D) mají přípustné řešení. Pak existují optimální řešení x^* pro (P) a y^* pro (D) a platí

$$c^T x^* = b^T y^*$$

FARKASOVO LEMMA

FOURIER-MOTZKINOVA ELIMINACE

GAUSSOVA ELIMINACE:

$Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ lineární kombinací nelze odvodit spor

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} A^T y &= 0 \\ b^t y &= -1 \end{aligned} \quad \text{nemá řešení}$$

NEROVNICE: smíme dělat ~~pozitin~~ nezáporné lineární kombinace

FOURIER-MOTZKINOVA ELIMINACE

$$(*) \quad \begin{aligned} a_i^T x' + x_n &\le b_i \qquad i = 1, \dots, m' \\ a_i^T x' - x_n &\le b_i \qquad i = m'+1, \dots, m'' \\ a_i^T x' &\le b_i \qquad i = m''+1, \dots, m \end{aligned} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$(*)$ má řešení právě když $(**)$ má řešení

$$(**) \quad \begin{aligned} (a_i^T + a_j^T) x' &\le b_i + b_j \qquad i = 1, \dots, m' \quad j = m'+1, \dots, m'' \\ a_i^T x' &\le b_i \qquad i = m''+1, \dots, m \end{aligned}$$

$\boxed{V}$ (Farkasovo lemma pro nerovnosti) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$Ax \le b$ má řešení $\overset{x \in \mathbb{R}^n}{}$ právě když neexistuje $\overset{\in \mathbb{R}^m}{y}$ tak, že

$$y \ge 0 \qquad A^T y = 0 \qquad b^T y < 0$$

<u>Dk:</u> $\exists y \Rightarrow Ax \le$ nemá řešení triv. – L.K.

$Ax \le b$ nemá řešení ~~⇒~~: F.M. eliminací zkonstruujeme $(**)$, z něj y', pak y pro pův. systém

$\boxed{V}$ (Farkasovo lemma) Systém $Ax=b$ má nezáporné řešení právě když neexistuje y tak, že $A^Ty \geq 0$ a $b^Ty < 0$.

Dk: $A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}$ $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

(Farkas pro $\leq$)

$Ax=b$ má nezáp. řeš. $\Leftrightarrow$ $A'x \leq b'$ má řešení $\Leftrightarrow$ neex. y'…

$\Leftrightarrow$ neex. y $\left(y_j = y'_j - y'_{j+m} \right)$.

$\boxed{V}$ Nechť $Ax \leq b$ má řešení. Pak platí

každé řešení x $Ax \leq b$ splňuje $c^Tx \leq \delta$

právě když

existuje $y \geq 0$ takové, že $A^Ty = c$ a $b^Ty \leq \delta$

Dk: $\Leftarrow$ $\begin{matrix} Ax \leq b \\ -c^Tx \leq -\delta - \varepsilon \end{matrix}$ nemá řešení pro žádné $\varepsilon > 0$ $\xLeftrightarrow[\text{Farkas}]{}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \geq 0, z \geq 0$ ~~$(A^T|c)\, y = 0 \wedge b^T_1$~~

$A^Ty - c^T z = 0 \wedge b^Ty - (\delta+\varepsilon) z < 0$

$\Longleftrightarrow$ (z≠0, protože $Ax \leq b$ má řešení) $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \geq 0$ $A^Ty = c \wedge b^Ty \leq \delta + \varepsilon$

Lépe: ~~$\exists y \geq 0, \lambda \geq 0$ takové, že $A^Ty = c$, $b^Ty + \lambda = \delta$~~ ~~$-b^Ty - \lambda = -\delta$~~

~~$\overset{(F.l.)}{\Longleftrightarrow}$ Neex. x, z takové, že $Ax + b^T z \geq 0$, $\lambda z \geq 0$~~ ~~$c^Tx + \delta z < 0$~~

~~$\Rightarrow$~~ $\Leftarrow$ $\exists y \geq 0$… $\Rightarrow$ ~~máme lin. komb.~~

$\Rightarrow$ neex. $y \geq 0, \lambda \geq 0$ $\begin{matrix} A^Ty = c \\ b^Ty + \lambda = \delta \end{matrix}$

$\Rightarrow$(F.l.) $\exists z \geq 0, \mu \geq 0$ $Az + b^T\mu \geq 0$, $c^Tz + \delta\mu < 0$

$\mu > 0$: $A\left(-\frac{1}{\mu}\right)z \leq b^T$ $c^T\left(-\frac{1}{\mu}\right)z > \delta$

$\mu = 0$: $Ax^0 \leq b$

$Az \geq 0$ $c^Tz < 0$

$A(x^0 - Jz) \leq b$ $c^T(x^0 - Jz) > \delta$ (neomezené)

DUALITA Z FARKASOVA LEMMATU

Dk: Nechť $\delta = \sup\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} \leq \inf\{b^T y \mid A^T c = c, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^m\}$

ex. prim.+duál. řeš.

slabá věta o dualitě

Pak, dle předch. v. $\exists y^* \geq 0 \quad A^T y^* = c \wedge b^T y^* \leq \delta$

Tedy platí rovnost a y^* je duální optimum.

Existence primárního optima:

(1) z uzavřenosti

(2) stejně s prohozením (P) a (D)

$\boxed{V}$ (complementary slackness – o komplementaritě)

Je-li x^* ~~opt.~~ příp. ř. (P) a y^* ~~opt.~~ příp. ř. (D),

pak x^* a y^* jsou obě optimální právě když

(*) $\quad \forall j = 1, \dots, m \quad y_j^* = 0 \vee a_j x^* = b_j \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* = b_j \right)$

Je-li x^* příp. ř. $(\overline{P})$ a y^* příp. ř. $(\overline{D})$,

pak jsou obě optimální právě když (*) a (**)

(**) $\quad \forall i = 1, \dots, m \quad x_i^* = 0 \vee \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_j$

Dk: (1) $y^{*T} b - c^T x^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z podmínek (D)}}}{=} y^{*T}(b - Ax^*) = \sum_{j=1}^{m} y_j^* (b_j - a_j x^*) \geq 0$

rovnost $\Leftrightarrow$ (*)

(2) $y^{*T} b - c^T x^* = y^{*T}(b - Ax^*) + (y^{*T} A - c^T) x^* \geq 0$

KUŽELY

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel pokud je uz. na nezáporné lin. kombinace

C je poly~~h~~edrální kužel $\overset{}{\Leftrightarrow}_{df}$ polyedr, kužel

$\boxed{V}$ Polyedrální kužel C je „obal" konečně mnoha vektorů

$\boxed{V}$ (Minkowski-Weyl) Každý polyedr P lze vyjádřit jako $P = Q + C$, kde Q je polytop a C polyedrální kužel.

FARKASOVO LEMMA GEOMETRICKY

$Ax = b$ má nezáp. řešení $\Leftrightarrow$ $b \in$ kužel gener. sloupci A

existuje y : $A^T y \geq 0$ a $b^T y < 0$ $\Leftrightarrow$ b lze oddělit od kužele gener. sl. A

SIMPLEXOVÁ METODA

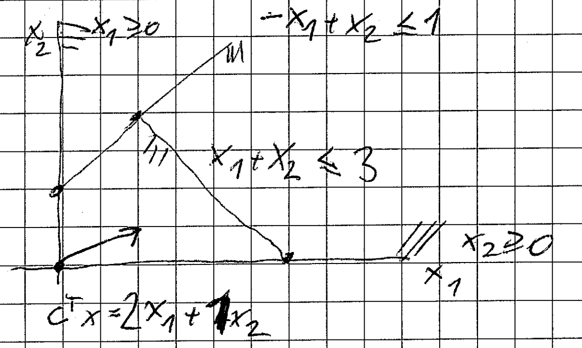
Rovnicový tvar

$\max \; c^T x$

$$Ax = b, \; x \geq 0 \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; \text{rank}(A) = m$$

<u>Def</u>: $X \subseteq \{1, \dots, n\}$; A_X sloupce A indexované X. <u>Def</u>: B báze A_B regulární

<u>Příklad</u>:



Bázické řešení .. nebázické prom. $= 0$

Přípustná báze .. bázické řešení je přípustné

Budeme udržovat bázi B a matici A tak, že $A_B = I_n$

$\max 2x_1 + x_2$ tak, že $\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 3$

$$B = \{3,4\} \quad \begin{array}{l} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 3 - x_1 - x_2 \\ \hline z = 2x_1 + x_2 \end{array}$$

$\downarrow$ x_1 do B, x_4 z B

$$B = \{1,3\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 - 2x_2 - x_4 \\ \hline z = 6 - x_2 - 2x_4 \end{array}$$

OPTIMUM

$\xrightarrow[x_3 \text{ z báze}]{x_2 \to B}$

$$\begin{array}{l} x_2 = 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 = 2 - 2x_1 + x_3 \\ \hline z = 1 + 3x_1 - x_3 \end{array}$$

$\downarrow$ x_1 do B, x_4 z B

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ \hline z = 4 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{array}$$

$\downarrow$ x_3 do B, x_2 z B

$$\begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 - 2x_2 - x_4 \\ \hline z = 6 - x_2 - 2x_4 \end{array}$$

NEOMEZENOST: $\begin{array}{l} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ \hline z = 2x_1 + x_2 \end{array}$

Def: Simplexová tabulka určená bázi B je soustava $m+1$ lin. rovnic pro proměnné $x_1, \dots, x_n$ a z která má stejná řešení jako $Ax = b$, $z = c^T x$ a koef. u x_B jsou I_n. Zapisujeme ji:

$$x_B = p + Q x_N \qquad N = [1..n] \setminus B \quad x_B \text{ - vekt. báz. prom.}$$
$$z = z_0 + r^T x_N \qquad p \in \mathbb{R}^m \quad Q \in \mathbb{R}^{(m \times (n-m))}, \ z_0 \in \mathbb{R}, \ r^T \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Odpovídající bázické řešení je $x_N = \vec{0}$, $x_B = p$

Pozor: B je přípustná $\Leftrightarrow$ $p \geq 0$

Bázické řešení je optimální $\Leftarrow$ $r \leq 0$

$p = A_B^{-1} b$, $Q = -A_B^{-1} A_N$, $z_0 = c_B^T p = c_B^T A_B^{-1} b$, $r = c_N - (c^T A_B^{-1} A_N)^T$

PIVOTOVACÍ KROK:

$B = \{j_1, \dots, j_m\}$ $j_1 < j_2 < \dots$ $N = \{l_1, \dots, l_{n-m}\}$

$B' = B \setminus \{j_s\} \cup \{l_t\}$

VSTUPUJÍCÍ PROMĚNNÁ: $r_{l_t} > 0$

VYSTUPUJÍCÍ PROMĚNNÁ:

$q_{st} < 0$ a $-\frac{p_s}{q_{st}}$ je minimální z $-\frac{p_i}{q_{it}}, q_{it} < 0$ $\qquad x_{j_i} = p_i + q_{i1} x_{l_1} + \dots + q_{it} x_{l_t} + \dots$

ÚPRAVA TABULKY:

- převedení vstupující proměnné vlevo + dosazení
- nebo: přičtení $-\frac{p_s}{q_{st}} \cdot q_{it}$ násobku s-tého řádku k i-tému

+ převedení a úprava řádku z

SIMPLEXOVÁ METODA:

opakujeme pivotovací krok

- není VSTUPUJÍCÍ PROM. $\Rightarrow$ konec, optimum
- není VYSTUPUJÍCÍ PROM. $\Rightarrow$ neomezená

SIMPLEXOVÁ METODA - VÝJIMKY, IMPLEMENTACE

PŘÍPUSTNÁ BÁZE:

V rovnicovém tvaru: Pomocná úloha: Předp. $b \geq 0$

max. $-(x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m})$

$$\bar{A}\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0$$

$$\bar{A} = (A | I_n) \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \qquad B = \{n+1, \dots, n+m\}$$

EFEKTIVITA + DEGENEROVANÁ ŘEŠ. (ne $p > 0$)

- závisí na pivotovacím pravidle, může cyklit
  - implementaci ... $m >> n$, stačí pův. tabulka a A_B^{-1}
- žádný polynomiální odhad, ani pro jasnovidecké pravidla - Hirshova domněnka, známo $n^{\log n}$
- typicky $2m \div 3m$ piv. kroků

PRAVIDLA

- největší r_{e_j} (Dantzig)
- největší výsledné z_0
- nejstrmější hrana: $c^T \cdot \dfrac{x_{nové} - x_{staré}}{\| x_{nové} - x_{staré} \|}$
- nejmenší index + nejmenší index vystupující
  Bland - necyklí
- lexikografické pravidlo + vstupující prom.
  S - kandidáti na vystupující proměnnou
  $s \in S$ tak, že $\left(\dfrac{q_{s1}}{q_{st}}, \dots, \dfrac{q_{s(n-m)}}{q_{st}} \right)$ je lex. nejmenší

- pro většinu pravidel je příklad pro 2^n kroků
- NÁHODNÁ HRANA: $\leq e^{O(\sqrt{n \ln n})}$