AFINNÍ A KONVEXNÍ KOMBINACE

<u>ZNAČENÍ</u>: $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ $\quad$ $x + A = \{x + a \mid a \in \mathbb{R}^d\}$

<u>Def</u>: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní prostor pokud $A = x + L$ pro $x \in \mathbb{R}^d$, L = vekt. pr.

afinní obal ~~X~~ množiny $X \in \mathbb{R}^d$ je průnik všech a.p. $A \supseteq X$

afinní kombinace bodů $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ je bod / výraz

$$\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n \quad \text{pro } \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$$

Def: ~~Def~~ ~~Pozn~~: $a_0, \dots, a_n$ jsou afinně nezávislé pokud neex. netriviální $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 0$ t. že $\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

<u>Pozn</u>: $a_0, \dots, a_n$ af. nez. $\iff$ $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ lineárně nezávislé

<u>Def</u>: dimenze X je dimenze afinního obalu X

<u>Pozorování</u>: dimenze X = max d t. že ex. afinně ~~nz~~

~~Def~~ $\boxed{V}$ Afinní obal $X = \{\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n \mid a_0, \dots, a_n \in X;\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1\}$

<u>Def</u>: $X \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní pokud $\forall x, y \in X\ \forall t \in [0,1]\ tx + (1-t)y \in X$

konvexní obal X je $\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{Y \mid Y \subseteq \mathbb{R}^d, Y \supseteq X, Y \text{ konvexní}\}$

konvexní kombinace ...

$$\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$$

$\boxed{V}$ $\operatorname{conv}(X) = \dots$

$\boxed{V}$ (Caratheodory) Nechť $\dim(X) = d$. Pak

$$\operatorname{conv}(X) = \{\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_d a_d \mid a_0, \dots, a_d \in X;\ \alpha_0, \dots, \alpha_d \geq 0,\ \alpha_0 + \dots + \alpha_d = 1\}$$

<u>Dk</u>: Vezmi min. konv. komb.

$k > d \Rightarrow$ af. závislost $\Rightarrow$ zmenši k

Def: nadrovina v $\mathbb{R}^n$
poloprostor v $\mathbb{R}^n$

$\boxed{V}$ $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní (uzavřené), C omezená, $C \cap D = \emptyset$.
Pak existuje oddělující nadrovina

Dk: $c \in C$, $d \in D$ tak, že $\|c-d\|$ je minimální
h nadrovina kolmá k cd, procházející středem

$\boxed{\text{Def}}$ Konvexní mnohostěn (= polyedr, polyhedron)
je průnik konečně mnoha poloprostorů

Omezený konvexní mnohostěn = polytop(e)

Pozn: dimenze - už definována
ekviv. – množina přípustných řešení LP
uzavřená množina

(Minkowsky-Weyl)
$\boxed{V}$ X je omezený konvexní mnohostěn
právě když
($\exists V$ konečná) $\mathrm{conv}(V) = X$

Příklady: Krychle / hyperkrychle
Osmistěn / zobecněný osmistěn
Simplex / pravidelný simplex

MINKOWSKI-WEYL DŮKAZ

$\Rightarrow$ mnohostěn je conv(V)

indukcí dle dimenze

označit A af. prostor dim d, kde P leží

p: přímka bodem x, která leží v A

- protne hranici, tj. nerovnost, vezmou se množiny bodů z ind. předp. pro $d-1$

$\Leftarrow$ z V uděláme množ. nerovností Q, které splní všechny vrcholy a mají koef. $\in [-1, 1]$

- $\forall x \notin conv(V)$ $\exists$ oddělující nerovnost
- nerovnosti jsou konvexní polytop (omezení dána podmínkami z daného vrcholu)
- conv(V) splňují všechny nerovnosti

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in [-1, 1]^n, \beta \in [-1, 1], \alpha^T v \leq \beta \ \forall v \in V \right\}$$

VRCHOLY, STĚNY, FASETY

Def: Nechť P je konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n$, t [illegible]

Jestliže $\forall x \in P \quad w^T x \le t$

a $\exists x \in P \quad w^T x = t$

pak $A = \{x \mid w^T x = t\}$ se nazývá <u>tečná nadrovina</u>

a $A \cap P$ se nazývá (vlastní) <u>stěna</u> P. Stěnou P je také P a $\emptyset$.

Pozn: Stěna je konv. mnohostěn

Průnik stěn je stěna. Dk: Součet nerovností

Def: Vrchol je stěna dimenze 0

Hrana je stěna dimenze 1

Faseta je stěna dimenze $\dim(P) - 1$

Tvrzení: Vrchol konv. mnohostěnu je extremální bod,

tj. $x \in P$ je vrchol $\iff x \notin \mathrm{conv}(P \setminus \{x\})$, navíc $P = \mathrm{conv}(V)$ vrcholy P.

Dk: V_0 min. generující $V \subseteq V_{ext} \subseteq V_0 \subseteq V$

Tvrzení: Nechť $E \subseteq F$ a F je stěny konv. mnohostěnu P. (⇒ E je stěna P)

Pak E je stěna F. Speciálně $x \in F$ je vrchol F právě když x je vrchol P.

Dk: Pro omezené P.

E stěna $P \Rightarrow E$ stěna F triviální

$\Leftarrow$ F definováno nadrovinou

$w^T x = t \qquad$ t. že $(\forall x \in P)(w^T x \ge t)$

t. j. $F = \{x \in P \mid w^T x = t\}$

E def. $\qquad$ t. že $(\forall x \in F)(v^T x \ge r)$

$v^T x = r \qquad$ a $E = \{x \in F \mid v^T x = r\}$

Uvažme nadrovinu

$A_\alpha = \{x \mid v^T x + \alpha w^T x = r + \alpha t\}$

$(\forall \alpha)\ A_\alpha \cap F = E$

$\exists \alpha$ (dost velké), že $(\forall x \in P)(v^T x + \alpha w^T x \ge r + \alpha t)$

MINIMÁLNÍ POPIS MNOHOSTĚNU

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b', \quad A''x \leq b''\} \quad (*)$$

Pozorování: Nechť $x_0 \in P$ splňuje $A''x_0 < b''$. Pak ~~platí~~ $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$. Navíc takové x_0 nepatří do žádné netriv. stěny P.

Def: Popis $(*)$ je minimální, pokud bez změny P nelze
(1) Změnit nějakou nerovnici na rovnici
(2) Vynechat nějakou (ne)rovnici

Pozorování: V minimálním popisu $\operatorname{rank}(A') = m'$ (počet ř. A')
Pozorování: $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$. Dk: najdeme $\overline{x}$ z min. pozorování

$\boxed{V}$ V minimálním popisu P nerovnice 1-1 odpovídají fasetám

Dk: nerovnice definuje fasetu:
Pro každou nerovnici ex. $\hat{x} \in P$ i $\overline{x} \in P$ tak, že $(a_i'')^T \hat{x} = b_i''$ a $(a_i'')^T \overline{x} < b_i''$
Tedy definuje ~~opěrnou~~ tečnou nadrovinu s netriviálním průnikem
$\dim(F) = d-1$: najdeme $\tilde{x}$: $A'\tilde{x} = b'$, $(a_i'')^T \tilde{x} > b_i''$ a $(a_j'')^T \tilde{x} \leq b_j''$, pro $i \neq j$
a $\overline{\overline{x}} \in \operatorname{conv}(\{\tilde{x}, \overline{x}\})$: $A'\overline{\overline{x}} = b'$ $(a_i'')^T \overline{\overline{x}} = b_i''$ a $A''\overline{\overline{x}} \leq b''$

faseta je def. nerovnicí:
Každá netriv. stěna F leží v hraniční nadrovině některého definujícího poloprostoru
jinak najdeme $\overline{x} \in F \Rightarrow \dim(F) = \dim(P)$, def. nadrovina obsahuje (P)
Musí být F = faseta definovaná $(a_i'')^T x = b''$, jinak $\dim(F) \leq \dim(P) - 2$

Důsl: Každá netriviální stěna je obsažena ve fasetě.
Navíc se dá definovat jako průnik faset

Důsl: Každý popis mnohostěnu obsahuje nerovnost pro každou fasetu.

Důsl: Pokud $\dim(P) = n$, je minimální popis jednoznačný (až na násobky nerovností)

SVAZ STĚN

- stěny s relací $\subseteq$ tvoří svaz
- kombinatorický popis není jednoduchý