Obsah

I Lebesgueův integrál (pokračování)

I.1 Integrál přes množinu

1.1 Tvrzení:

Buď $M \subseteq E_n$ měřitelná, buď $f : E_n \to E_1^*$. Položme $\hat{f}_M = f \cdot c_M$. Potom byla-li f ve třídě L, je i $\hat{f}_M$ v L.

Důkaz: Položme $\varphi_n = \min(n \cdot c_M, \max(f, -nc_M))$. Potom je ([XXI-6.4])
$\varphi_n \in \Lambda$ a jelikož $|\varphi_n| \leq |f|$, je podle [XII-6.7] $\varphi \in L$. Jelikož dále zřejmě
$\varphi_n \to \hat{f}_M$, je podle Lebesgueovy věty $\hat{f}_M \in L$.
□

Poznámka:Obdobná tvrzení platí i pro $L^R, L^R a\Lambda$. Přesvědčte se o tom.

1.2 Buď $M \subseteq E_n$ měřitelná. Definujme

$$\int_M f = \int \hat{f}_M$$

kdykoli má pravá strana smysl.

Tedy podle [1.1] má $\int_M f$ smysl např. kdykoli $f \in L$.

1.3 Často se stane, že f je definavána jen ja M, nebo třeba na nějaké její podmnožině $N \overset{\subset}{\neq} E_n$. Potom je samozřejmě otázka, zda lze f rozšířit na celé E_n tak, aby vzniklá funkce byla v $L(L^R, L^K, \Lambda)$. Obvykle je ale na první pohled videt, že tomu tak je. Např. platí

Tvrzení: *Buď M kompaktní. Potom pro kteroukoli funkci vzniklou ze spojitých funkcí na M postupným prováděním limit buď monotóních, nebo omezených mezi dvěma konstantami, má $\int_M f$ smysl.*

Důkaz: je možno nechat čtenáři jako užitečné cvičení. Návod: Především užitím Tietzeovy a Leviho věty dokažte, že pro spojitou f na M je funkce $\overline{f}$ definovaná na E_n předpisem

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

ve třídě L. Potom užijte Leviho a Lebesgueovu větu.
□

1.4 Zcela bezprostředně vidíme, že platí

Věta: *Buďte M_n $(n = 1, \ldots, k)$ měřitelné a po dvou skoro disjunktní. Potom*

$$\int_M f = \sum_{n=1}^{k} \int_{M_n} f.$$

1.5 Věta: *Buďte M_n, $\quad n = 1, 2, \ldots,$ měřitelné.*

(a) Nechť M_n jsou skoro disjunktní, nechť $M = \bigcup M_n$ a nechť má $\int_M f$ smysl. Potom

$$\int_M f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M_n} f.$$

(b) Nechť $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots, M = \bigcup M_n$ a nechť má $\int_M f$ smysl. Potom

$$\int_M f = \lim_n \int_{M_n} f.$$

(c) Nechť $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots, M = \bigcap M_n$ a nechť má $\int_{M_1} f$ smysl. Potom

$$\int_M f = \lim_n \int_{M_n} f.$$

Důkaz: (a) Je-li $f \geq 0$ dosteneme tvrzení okamžitě z Leviho věty. Tedy to především platí pro f^+ a f^-. Má-li ale $\int_M f$ smysl, má podle věty [XXI-6.9] smysl rozdíl $\int_M f^+ - \int_M f^-$ a tedy aspoň jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{M_n} f^, \sum_{n=1}^{\infty}\int_{M_n} f^-$ musí konvergovat, a to, samozřejmě, absolutně. Proto

$$\int_M f = \int_M f^+ - \int_M f^- = \sum\int_{M_n} f^+ - \sum\int_{M_n} f^- = \sum\int_{M_n}(f^+ - f^-).$$

(b) Aplikujeme (a) na $M_1, M_2\backslash M_1, M_3\backslash M_2, \ldots$.

(c) Potožte $N_n = M_1\backslash M_n$. Máme $M = M_1\backslash\bigcup N_n$. Užijte (b) a [1.4].

□

1.6 Cvičení Dokažte následující tvrzení:

Nechť f je spojitá a Lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $(a,b), -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Buď F na (a,b) primitivní funkce k f. Potom existjí $\lim_{x\to b^-} F(x), \lim_{x\to a^+} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

I.2 Parametry v integrovaných funkcích

2.1 VĚTA: *Buď T metrický prostor a buď $f : T\times E_n \to E_1^*$ funkce takové, že*

(1) pro skoro všechna x je funkce $f(-,x) : T \to E_1$ spojitá v bodě t_0,

(2) existuje okolí U bodu t_0 tokové, že $f(t,-) : E_n \to E_1^*$ je ve třídě L pro každé $t \in U\backslash\{t_0\}$,

(3) existuje $g \in L$ a okolí U bodu t_0 takové, že pro skoro všechna x a pro $t \in U\backslash\{t_0\}$ platí $|f(t,x) \leq g(x)|$.

Potom $f(t_0,-)$ je v L a platí

$$\int f(t_0,x)dx = \lim_{t\to t_0}\int f(t,x)dx.$$

Důkaz: Zvolme $t_n \in U\backslash\{x_0\}$ tak aby $\lim t_n = t_0$ a užijme Lebesgueovy věty.

□

2.2 VĚTA: *Buď $f : E_1 \times E_n \to E_1^*$ taková, že v nějakém okolí U bodu t_0*

(1) existují parciální derivace $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ pro skoro všechna x,

(2) existuje $g \in L$ taková, že pro skoro všechna x a pro $t \in U$ je

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x),$$

(3) existuje $t \in U$ existují integrály $\int f(t,x)dx$.

Potom existuje $\int \frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t}dx$ a platí

$$\int \frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t}dx = \frac{d}{dt}\int f(t_0,x)dx.$$

Důkaz: Máme
$\frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(t_0+h,x) - f(t_0,x))$. Označme $\varphi(h,x) = \frac{1}{h}(f(t_0+h,x) - f(t_0,x))$. Podle věty o přírůstku funkce máme

$$|\varphi(h,x)| = \left|\frac{\partial f(t_0+\vartheta h,x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$$

a můžeme tedy aplikovat větu [2.1].

□

I.3 Fubiniova věta

3.1 Užívání symbolu $\int_{E_n}$ a pod. v tomto odstavci má jinou úlohu než obdobné $\int_A$ v odstavci [1].Když bylo $A = E_n$, psali jsme dosud prostě $\int f$. Zde půjde jen o indikaci toho, o které proměnné se při příslušném integrování jedná.

3.2 Připomeňme si symboliku $Z, Z^R, Z^K, \ldots$ z kapitoly [XXI]. K vyznačení toho, o který euklidovský prostor E_n se právě jedná budeme užívat příslušného indexu: Z_n, Z_n^R atd.

3.3 Lemma: Nechť f je definována na E_{m+n}. Definujme F na E_m předpisem

$$F(x) = \widetilde{\int}_{E_n} f(x,y)dy \quad (\text{resp. } F(x) = \underset{\sim}{\int}_{E_n} f(x,y)dy).$$

Potom platí

$$\widetilde{\int}_{E_{m+n}} f \geq \widetilde{\int}_{E_m} F \quad (\text{resp. } \underset{\sim}{\int}_{E_{m+n}} f \leq \underset{\sim}{\int}_{E_m} F)$$

Důkaz: I. Především nechť $f \in Z_{m+n}$. Potom podle věty [XX.3.1] platí dokonce rovnost. Nadto je

$$F \in Z_m :$$

Skutečně, zvolme kompaktní nosič J funkce f. Pro $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že $\varrho(x,x') < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y)| < \frac{\varepsilon}{K}$ kde K je objem kvádru J, nezávisle na y. Máme tedy

$$\left| \int F(x) - \int F(x') \right| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

II. Buďte nyní $f_k \in Z_{m+n}, f_k \nearrow f$. Potom $F_k(x) = \int f_k(x,y)dy \nearrow F(x)$ a též $f_k(x,-) \nearrow f(x,-)$ pro všechna y. Tedy je stále

$$\int_{E_n} f(x,y)dy = \lim_k \int_{E_{m+n}} f_k = \lim_k \int_{E_m} F_k = \int_{E_m} F$$

(užíváme symbolu $\int$ místo J z prvních tří odstavců [XXI]. kapitoly.)

III. Buď nyní f obecné, buď $g \in Z^R_{m+n}$ takové, že $g \geq f$. Položme $G(x) = \int_{E_n} g(x,y)dy$. Potom zřejmě $G \geq F$ a podle II máme

$$\int_{E_{m+n}} g = \int_{E_m} G \geq \widetilde{\int}_{E_m} F.$$

a tedy

$$\widetilde{\int} f = \inf \int g \geq \widetilde{\int} F.$$

□

3.4 VĚTA: *(Fubiniova) Buď $f \in L^*_{m+n}$. Potom pro skoro všechna $x \in E_m$ existuje $\int_E f(x,y)dy$. Označíme-li jeho hodnotu $F(x)$ (a dodefinujeme-li $F(x)$ ve zbylých bodech libovolně), je $F(x) \in L^*_m$ a platí*

$$\int_{E_{m+n}} f = \int_{E_m} F.$$

Důkaz: Položme $\widetilde{F}(x) = \widetilde{\int} f(x,y)dy$, $\underset{\sim}{F}(x) = \underset{\sim}{\int} f(x,y)dy$. Podle [3.3] máme

$$\int f = \widetilde{\int} f \geq \widetilde{\int} \widetilde{F} \left\{ \begin{array}{c} \geq \int \widetilde{F} \geq \\ \geq \underset{\sim}{\widetilde{\int}} \underset{\sim}{F} \geq \end{array} \right\} \underset{\sim}{\int} \underset{\sim}{F} \geq \underset{\sim}{\int} f = \int f.$$

Buď $f \in L_{m+n}$. Potom dostáváme především $\widetilde{\int} \widetilde{F} = \underset{\sim}{\int} \widetilde{F}$ a jsou to konečné hodnoty a tedy $\widetilde{F} \in L_m$ a stejně $\underset{\sim}{F} \in L_m$. Dále $\int \widetilde{F} = \int \underset{\sim}{F}$ a tedy $\int(\widetilde{F} - \underset{\sim}{F}) = 0$ takže $\widetilde{F} = \underset{\sim}{F}$ skoro všude podle [XII-4.9]. Je-li $f \in L^*$, přejdeme k limitě podle Leviho věty.

□

I.4 Věta o substituci

4.1 Obsahem tohoto odstavce je jediná věta, kterou uvedeme bez důkazu, jen s vysvětlením, které ale, doufám bude dost přesvědčivé. Důkazu se vyhýbám proto, abychom nemuseli provádět některé pracné podrobnosti. Princip, na němž je tvrzení založeno, by měl být z vysvětlení jasný.

VĚTA: *Buď M měřitelná podmnožina E_n, buď φ prosté regulární zobrazení nějaké otevřené množiny $U \subseteq E_n$ do E_n takové, že $\varphi(U) \supseteq M$. Nechť má $\int_M f$ smysl. Potom*

$$\int_M f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(y)) \cdot |D_\varphi(y)|\, dy,$$

kde D_φ je Jacobiho determinant zobrazení φ.

VYSVĚTLENÍ:Připomeňte si odstavec [XV-6.3] ve skriptech pro první ročník. Viděli jsme tam, že faktor $\varphi'(x)$ v jednorozměrné větě o substituci je korekce za natažení nebo smrštění při deformaci φ. Co dělá deformace φ s lokálním objemem ve vícerozměrném případě? Představme si malou krychli

$$\{(x_1 + t_1 h, x_2 + t_2 h, \ldots, x_n + t_n h)|t_i \in \langle 0, 1\rangle\}$$

Ta se zobrazením φ transformuje na

$$\{(\varphi_1(x_1 + t_1 h, \ldots), \ldots, \varphi_n(x_1 + t_1 h, \ldots))|t_i \in \langle 0, 1\rangle\},$$

což je, až na chybu řádově menší než h, rovnoběžnostěn

$$\left\{(\varphi_1(x) + \sum_j \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_j} h t_j, \ldots, \varphi_n(x) + \sum_j \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_j} h t_j)|t_i \in \langle 0, 1\rangle\right\}.$$

Takže, připomeneme-li si odstavec [X-6] (Geometrický smysl determinantu), původní krychle o objemu h^n se transformuje (skoro) na rovnoběžnostěn o objemu $h^n \cdot \det(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}) = h^n \cdot D_\varphi(x)$. Odtud korekce ve formuli.

II Křivky a křivkové integrály

II.1 Křivky a orientované křivky

1.1 Representací (po částech hladké) křivky v $\mathbb{E}_n$ rozumíme spojité zobrazení

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n$$

takové, že existuje rozdělení

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = b$$

intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které platí:

(1) na každém intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ má každá z funkcí φ_j spojitou derivaci (v krajních bodech máme na mysli jednostranné derivace), a

(2) pro každé i existuje j takové, že $\varphi_j'(t)$ je kladná nebo záporná na celém (a_{i-1}, a_i).

1.2 Řekneme, že dvě representace

$$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n$$
$$\psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{E}_n$$

jsou **slabě ekvivalentní** (a píšeme

$$\varphi \sim \psi)$$

, existuje-li homeomorfismus $\alpha : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ takový, že $\psi \circ \alpha = \varphi$.

Uvědomte si, že relace $\sim$ je skutečně ekvivalence, to jest, že je reflexivní, symetrická a transitivní. Třídy ekvivalence v této ekvivalenci budeme nazývat **(po částech hladké) křivky**.

1.3 Poznámka: Zřejmě v případě $\varphi \sim \psi$ platí, že $\varphi[\langle a, b\rangle] = \psi[\langle c, d\rangle]$. Na druhé straně, jsou-li representace φ a ψ prostá zobrazení a je-li $\varphi[\langle a, b\rangle] = \psi[\langle c, d\rangle]$, je $\varphi \sim \psi$. Skutečně, vezměme zobrazení

$$\overline{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \varphi[\langle a, b\rangle], \overline{\psi} : \langle c, d\rangle \to \psi[\langle c, d\rangle]$$

definovaná stejným předpisem jako φ resp. ψ. Jelikož zúčastněné prostory jsou kompaktní, jsou $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ homeomorfismy (viz [XII-5.11]). Položme $\alpha = \overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\varphi}$.

1.4 Tvrzení: Zobrazení α z definice slabé ekvivalence je po částech hladké.

Důkaz: Buďte $a_0, \dots, a_r$ resp. $c_0, \dots, c_s$ rozdělení z [1.1] pro φ resp. ψ. Buď $b_0, \dots, b_k$ společné zjemnění rozdělení $a_0, \dots, a_r$ a $\alpha^{-1}(c_0), \dots, \alpha^{-1}(c_s)$. Na intervalu $\langle \alpha(b_{i-1}), \alpha(b_i)\rangle$ zvolme j tak, aby ψ_j bylo prosté hladké zobrazení s nenulovou derivací. Potom má ψ_j^{-1} derivaci a máme $\alpha(t) = \psi_j'(\varphi_j(t))$ na $\langle b_{i-1}, b_i\rangle$.
□

1.5 Řekneme, že dvě representace

$$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n, \quad \psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{E}_n$$

jsou **ekvivalentní** (a píšeme

$$\varphi \approx \psi),$$

existuje-li **rostoucí** homeomorfismus α takový, že $\psi \circ \alpha = \varphi$.

Třídy ekvivalence $\approx$ se nazývají (po častech hladké) **orientované křivky**.

Tvrzení: *Nechť je φ prosté až na případnou rovnost $\varphi(a) = \varphi(b)$. Potom třída v $\sim$ obsahující φ se rozpadá na právě dvě třídy v ekvivalenci $\approx$.*

Důkaz: Jelikož $\varphi \approx \psi \Rightarrow \varphi \sim \psi$, rozpadá se třída v $\sim$ na třídy podle $\approx$. Definujme $\lambda : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ předpisem

$$\lambda(t) = -t + b - a.$$

Potom je $\varphi \sim \varphi \circ \lambda$ ale (vzhledem k prostotě φ) není $\varphi \approx \varphi \circ \lambda$. Tedy jsou třídy podle $\approx$ v třídě podle $\sim$ aspoň dvě. Jestliže $\varphi \not\approx \psi \not\approx \chi$ a $\varphi \sim \psi \sim \chi$, je zřejmě $\varphi \approx \chi$ (proč?). Tedy jsou právě dvě.
□

1.6 Poznámka a úmluva: Geometrické představě křivky jako útvaru v prostoru dobře odpovídá pojem [1.2] – viz poznámku [1.3]. Konkrétní represenataci si můžeme představovat jako bychom měly navíc informaci o časovém průběhu cesty po dané křivce. U orientované křivky křivky nás sice časový průběh nezajímá, zajímá nás však směr, kterým se po křivce pohybujeme.

Často budeme volně hovořit o (orientované) křivce

$$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n;$$

máme pak samozřejmě na mysli příslušnou třídu ekvivalence.

1.7 Nechť L, K jsou **oreintované** křivky s representacemi $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n, \psi : \langle a_1, b_1\rangle \to \mathbb{E}_n$ takové, že $\varphi(b) = \psi(a_1)$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1 = b$ (jinak nahrdíme ψ třeba representací $\psi \circ \alpha$ kde $\alpha(t) = a_1 + (t - b)$). Pišme pak $c = b_1$ a definujme zobrazaní $\varphi * \psi : \langle a, c\rangle \to \mathbb{E}_n$ předpisem

$$(\varphi * \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in \langle a, b\rangle, \\ \psi(t) & \text{pro } t \in \langle b, c\rangle. \end{cases}$$

$\varphi * \psi$ je representací nové (orientované) křivky, kterou označíme

$$L + K.$$

Je velmi lehké, ale užitečné cvičení na orientaci v zatím zavedených pojmech dokázat, že

(1) $\varphi * \psi$ je opravdu representace křivky (viz [XVII-1.1])

(2) orientovaná křivka $L + K$ nezávisí na výběru representací orientovaných křivek L, K a označení je tedy korektní

(3) $(L + K) + M = L + (K + M)$ má-li výraz aspoň na jedné straně smysl.

1.8 Připomeňte si zobrazení λ z [1.5]. Je-li L orientovaná křivka s representací $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_2$, definujme

$$-L$$

jako orientovanou křivku určenou representací $\varphi \circ \lambda$. Tedy je $-L$ „ta druhá orientovaná křivka“ patřící do stejné třídy ekvivalence $\sim$.

Opět definice křivky $-L$ nezávisí na volbě representace.

1.9 Dva termíny: Křivce s prostými representacemi se někdy říká **jednoduchý oblouk**, křivce s representací takovou, že $\varphi(a) = \varphi(b)$, ale $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ pro $x \neq y$, $(x, y) \neq (a, b)$ se říká **jednoduchá uzavřená křivka**.

Není snad třeba připomínat, že slovo „uzavřená“ zde má jiný smysl než v souvislosti s podmnožinami metrického prostoru.

II.2 Křivkový integrál I. druhu

2.1 V dalším budeme muset sledovat, zda se v tom kterém případě jedná o reálnou či vektorovou funkci. Druhý případ si budeme opět symbolicky připomínat, takže speciálně representant $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ budeme raději zapisovat jako $\vec{\varphi}$.

Připomeňme si ještě definici **normy** z oddílu [VII-5.1] (totiž $\| u \| = \sqrt{u \cdot u}$, kde $u \cdot v$ je skalární součin) a to, že $\| x - y \|$ je běžná euklidovská vzdálenost „bodu“ x od „bodu“ y.

2.2 Připomeňte si definici Riemanova integrálu a dívejte se na něj jako na jakousi sumaci funkce f přes interval. Uvědomte si k tomu, že interval je zvláštní, velmi jednoduchý, případ křivky (dané identickou representací).

Takovou sumaci nyní trochu zobecníme. Rozdělením křivky L dané reprezentací $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n$ budeme rozumět posloupnost bodů

$$(*) \qquad \varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_k),$$

kde $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ ve smyslu kapitoly [XV].

Uvědomte si, že jelikož $\langle a, b\rangle$ je kompaktní prostor, φ je stejnosměrně spojité zobrazení a tedy zvyšujeme-li jemnost rozdělení $t_0, \dots, t_n$, zvyšuje se též názorná jemnost posloupnosti $(*)$; t.j, za sebou následující body budou blíže než předepsané $\varepsilon > 0$, zvolíme-li dostatečně jemné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Mějme nyní spojitou reálnou funkci f definovanou (aspoň) na $\varphi[\langle a, b\rangle]$. V analogii s Riemanovým integrálem (připomeňte si zejména větu [XV-4.3]) zkoumejme součty

$$\sum_{i=1}^{k} f(\vec{\varphi}(t_i))\cdot \parallel \vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1}) \parallel$$

a podívejme se, zda se neblíží k nějaké určité hodnotě. Podle věty o přírustku funkce součet upravíme na

$$\begin{gathered}\sum_i f\left(\vec{\varphi}(t_i)\right) \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})\right)^2} = \\ \sum_i f\left(\vec{\varphi}(t_i)\right) \cdot \sqrt{\sum_j \varphi_j'(\vartheta_{ij})^2 (t_i - t_{i-1})^2} = \\ \sum_i f\left(\vec{\varphi}(t_i)\right) \cdot \sqrt{\sum \varphi_j'(\vartheta_{ij})^2} \cdot (t_i - t_{i-1})\end{gathered}$$

což se podle [XV-4.3] při jemnosti rozdělení jdoucí k 0 blíží k hodnotě

$$\int_a^b f\left(\vec{\varphi}(t)\right) \cdot \parallel \vec{\varphi}'(t) \parallel dt.$$

2.3 Je-li $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n$ representace křivky L, nazýváme číslo

$$\int_a^b f\left(\vec{\varphi}(t)\right) \cdot \parallel \vec{\varphi}'(t) \parallel dt$$

křivkovým integrálem I. druhu z funkce f přes křivku L a označujeme

$$\int_L f \text{ nebo } \int_L f(x)dx$$

(což snad nepovede ke zmatkům; v literatuře občas najdeme symbol

$$\oint_L f).$$

2.4 Tvrzení: Výraz z definice křivkového integrálu I. druhu nezávisí na volbě representace.

Důkaz: Nechť φ, ψ jsou jako v [1.1], nechť $\psi \circ \alpha = \varphi$. Podle [1.4] je α po částech hladká a tedy (až na konečně mnoho bodů) máme

$$\parallel \vec{\varphi}'(t) \parallel = \sqrt{\sum \vec{\varphi}_j'(t)^2} = \sqrt{\sum \vec{\psi}_j'(\alpha(t))^2 \cdot \alpha'(t)^2} = \sqrt{\sum \vec{\psi}_j'(\alpha(t))^2} \cdot |\alpha'(t)| = \parallel \vec{\psi}'(\alpha(t)) \parallel \cdot |\alpha'(t)|$$

a tedy podle věty o substituci máme

$$\int_a^b f(\vec{\varphi}(t))\cdot \parallel \vec{\varphi}'(t) \parallel dt = \int_a^b f(\vec{\psi}(\alpha(t)))\cdot \parallel \vec{\psi}'(\alpha(t)) \parallel \cdot |\alpha'(t)| dt = \int_c^d f(\vec{\psi}(\tau))\cdot \parallel \vec{\psi}'(\tau) \parallel d\tau.$$

Pozorný čtenář se ptá, kam se poděla absolutní hodnata : Bylo-li $\alpha'(t)$ záporné, je $\alpha(a) = d$ a $\alpha(b) = c$. Znaménko se použije na přehození mezí.
□

2.5 Poznámka: Připomeňte sei úvahu o délce křivky z [XVI-3]. Vidíme, že se na délku L můžeme dívat jako na křivkový integrál z kompaktní jednotkové funkce přes L. Tedy, délka křivky L representované φ je

$$\int_L 1 = \int_a^b \parallel \varphi' \parallel .$$

II.3 Křivkový integrál II. druhu

3.1 Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{E}_n$ representace orientované křivky L, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ vektorové funkce definované (aspoň) na $\vec{\varphi}[\langle a, b\rangle]$. **Křivkovým integrálem II. druhu** z vektorové funkce $\vec{f}$ přes orientovanou **křivku** L rozumíme číslo

$$\int_L \vec{f} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)dt$$

(násobení v druhém výrazu byl tedy skalární součin vektorů). Bude-li nebezpečí nedorozumění, označíme křivkové integrály I či II druhu

$$(I) \int_L, \quad (II) \int_L.$$

Připomeňme, že v literatuře se často setkáváme se označením křivkového integrálu II. druhu

$$\int_L Pdx + Qdy, \quad \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

(jednalo-li se o vektorové funkce $(P, Q), (P, Q, R)$).

3.2 Názorný „fysikální" smysl křivkového integrálu II. druhu je tento: Postupujeme po orientované křivce od počátečního do koncového bodu. $\int_L$
$vecf$ pak vyjádří práci, kterou je nutno vykonat, potýkáme-li se při tom se silou vyjádřenou vektorovým polem $\vec{f}$.

3.3 Tvrzení: Výraz z definice integrálu II. druhu nezávisí na volbě reprezentace.

Důkaz: Mějme $\varphi = \psi \circ \alpha$. Nyní je ovšem $\alpha'(t) > 0$ (až na konečně mnoho bodů). Máme

$$\sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\varphi(\vec{t})) \cdot \varphi_j'(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\psi(\vec{\alpha(t)})) \cdot \psi_j'(t) \cdot \alpha'(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_c^d f_j(\psi(\tau)) \cdot \psi_j'(\tau)d\tau.$$

□

3.4 V předchozím důkazu bylo $\alpha(a) = c$ a $\alpha(b) = d$, nebylo tedy třeba nic vyrovnávat. Kdyby ale bylo α funkce klesající, znaménko by se změnilo. Získali jsme tak

Pozorování:

$$\int_{-L} \vec{f} = -\int_L \vec{f}.$$

3.5 Zcela bezprostředně vidíme, že platí

Tvrzení: *Buďte K, L orientované křivky takové, že $K + L$ má smysl. Potom*

$$\int_{K+L} \vec{f} = \int_K \vec{f} + \int_L \vec{f}.$$

3.6 Buď tentokrát f (skalární) funkce definovaná na $\vec{\varphi}[\langle a, b\rangle]$ kde φ je representace křivky L. Na této množině definujme vektorovou funkci $\vec{f}$ předpisem

$$\vec{f}(\vec{\varphi}(t)) = f(\vec{\varphi}(t)) \cdot \frac{\vec{\varphi}'(t)}{\| \vec{\varphi}'(t) \|}.$$

Okamžitě zjišťujeme, že platí

$$(I) \int_L f = (II) \int_L \vec{f}.$$

Integrál prvního druhu je tedy možno vyjádřit integrálem II. druhu. Pozorný čtenář může namítnout, že $\vec{f}$ byla na dané množině definována nejednoznačně: faktor $\frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|}$ by mohl záviset na volbě representace. Jenomže je-li$\vec{\varphi} \sim \vec{\psi}$, třeba $\vec{\varphi} = \vec{\psi} \circ \alpha$, a položíme-li $\tau = \alpha(t)$ (takže ptáme-li se na bod $x \in \vec{\varphi}[\langle a, b\rangle]$, je $x = \varphi(t) = \psi(\tau)$), dostáváme $\vec{\varphi}'(t) = \vec{\psi}'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ a tedy

$$\frac{\vec{\varphi}'(t)}{\| \vec{\varphi}'(t) \|} = \frac{\vec{\psi}'(\tau)}{\| \vec{\psi}'(\tau) \|} \cdot \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Nejednoznačnost je tedy pouze ve znaménku; tu ale potřebujeme na vyrovnání toho, že $(II) \int_L$ závisí na orientaci a $(I) \int_L$ ne.

3.7 Poznamky:

1. Výrazy „I. druhu" a „II. druhu" v názvech příslušných integrálů jsou tedy poněkud matoucí. Mohou budit dojem jakéhosi pořadí významu. Je tomu ale spíš tak, že integrál II. druhu je základní a integrál I. druhu se dá na něj převést. Ostatně dále uvidíme, že i další typ křivkového integrálu se dá integrálem II. druhu vyjádřit.

2. Funkce f či $\vec{f}$ obvykle bývá definována ne množině podstatně větší než $\vec{\varphi}[\langle a, b\rangle]$. V některých záležitostech (viz třeba Greenovu větu v oddílu 5 dále) to hraje zásadní roli.

3.8 Jelikož spojité funkce na kompaktní množině jsou omezené, dosáváme z Věty [XXIII-2.2] okamžitě

TVRZENÍ: *Nechť vektorova funkce $\vec{f}(\alpha, x)$ závisí na reálném parametru α tak, že $f_j(\alpha, x)$ mají spojité parciální derivace podle α. Potom pro křivkový integrál II. druhu platí*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_L \vec{f}(\alpha, x)dx = \int_L \frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha}dx.$$

II.4 Komplexní křivkový integrál

4.1 Pro komplexní funkci jedné komplexní proměnné, $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ kde f_1, f_2 jsou reálné funkce se zavádí Riemannův integrál formulí

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$$

4.2 V komplexní rovině $\mathbb{C}$ zavídíme vzdálenost jako $|x - y|$, což při interpretaci komplexních čísel jako dvojic reálných čísel shoduje s běžnou metrikou v $\mathbb{E}_2$. Křivky v $\mathbb{C}$ budou prostě křivky v $\mathbb{E}_2$ (ve smyslu [1.1], [1.5]) s tím, že hodnoty $\varphi(t)$ budou chápány jako komplexní čísla, což zejména znamená možnost násobit je jinými komplexními čísly ve smyslu tělesa $\mathbb{C}$.

4.3 Buď $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ representace orientované křivky L, buď f komplexní funkce jedné komplexní proměnné definované na nějaké množině obsahující $\varphi[\langle a, b\rangle]$. Komplexní křivkový integrál

$$\int_L f(z)dz$$

se zavádí formulí

$$(*) \qquad \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

(nezávislost na volbě representace bude patrna z [4.4]). Formule se nápadně podobá formulím, které znáte, ale pozor: podstatné je, že součin $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ komplexních čísel je operace přece jen jiného charakteru než násobení čísel reálných. Výraz (*) je sice opět limitní hodnota součtů

$$\sum f(\varphi(t_i)) \cdot (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$$

přes podrozdělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, což nápadně připomíná původní Riemannův integrál (součty násobků hodnot funkce s rozdíly za sebou následujících bodů rozdělení); jenomže v případě Riemanova integrálu měly tyto násobky přirozenou interpretaci jako obsahy jistých obdélníků a chápat takto součin komplexních čísel by vyžadovalo značnou fantazii.

4.4 Komplexní křivkový integrál lze vyjádřit pomocí křivkových integrálů II. druhu.

VĚTA: *Rozložme komplexní funkci jedné komplexní proměnné na reálnou a imaginární část*

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z).$$

Potom pro komplexní křivkový integrál z funkce f platí

$$\int_L f(z)dz = (II)\int_L (f_1, -f_2) + i(II)\int_L (f_2, f_1).$$

Důkaz: Máme

$$\begin{gathered}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \\ \int_a^b (f_1(\varphi(t) + i f_2(\varphi(t))) \cdot (\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t))dt = \\ \int_a^b (f_1(\varphi(t) \cdot \varphi_1'(t) + (-f_2(\varphi(t))) \cdot \varphi_2'(t))dt + i\int_a^b (f_2(\varphi(t))\varphi_1(t) + f_1(\varphi(t) \cdot \varphi_2(t))dt = \\ \int_L (f_1, -f_2) + i\int_L (f_2, f_1).\end{gathered}$$

□

POZOROVÁNÍ: *Z této věty též vidíme, že komplexní křivkový integrál nezávisí na representaci orientované křivky. Na orientaci ovšem závisí.*

4.5 Odhad v následujícím tvrzení je zbytečně hrubý. Pro naše účely však bude stačit.

LEMMA: *Nechť na křivce L o délce d platí pro komplexní funkci f že $|f(z)| \le A$. Potom*

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le 4A \cdot d$$

Důkaz:

$$\begin{gathered}\left|\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| = \left|\int_a^b f_1\varphi_1' - \int_a^b f_2\varphi_2' + i\int_a^b f_2\varphi_1' + \int_a^b f_1\varphi_2'\right| \le \\ \left|\int_a^b f_1\varphi_1'\right| + \left|\int_a^b f_2\varphi_2'\right| + \left|\int_a^b f_2\varphi_1'\right| + \left|\int_a^b f_1\varphi_2'\right| \le \\ \int_a^b |f_1| \cdot |\varphi_1'| + \int_a^b |f_2| \cdot |\varphi_2'| + \int_a^b |f_2| \cdot |\varphi_1'| + \int_a^b |f_1| \cdot |\varphi_2'| \le \\ 4\int_A^b A \cdot |\varphi'| = 4A\int_a^b |\varphi'| = 4Ad.\end{gathered}$$

(absolutní hodnota α komplexního čísla α je totéž, co norma $\| \alpha \|$, chápeme-li ho jako bod v $\mathbb{E}_2$. Užili jsme pak pozorování v [2.5]).
□

II.5 Greenova formule

5.1 V tomto odstavci budeme implicitně používat sice velmi názornou, ale ve skutečnosti nikterak snadnou **Jordanovu větu**:

Prostá uzavřená křivka v rovině tuto rovinu roztíná na (právě) dvě oblasti, jednu z nich neomezenou („vnější oblast") a jednu omezenou („vnitřní oblast").

Naštěstí v konkrétních aplikacích formule, kterou budeme v tomto odstavci dokazovat půjde jen o roztínání roviny **kružnicí** na vnitřní kruh a doplněk uzávěru tohoto kruhu, kde platnost Jordanovy věty je triviálně ověřitelná.

5.2 Ještě v jedné věci se budeme muset odvolat na názor. O orientaci prosté uzavřené křivky v rovině budeme užívat výrazu „proti směru hodinových ručiček" a „ve směru hodinových ručiček" (viz obr XXIV.1)

Snad to nepovede k nedorozumění. Ostatně v konkrétních aplikacích půjde o kružnice, kde je snadné dát těmto pojmům přesný význam (representace

$$\vec{\varphi}(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$$

je proti směru hodinových ručiček).

5.3 VĚTA: *((Greenova formule) :) Buď L prostá uzavřená křivka orientovaná proti směru hodinových ručiček, buď M sjednocení vnitřní oblasti s krivkou L, buď $\vec{f} = (f_1, f_2)$ vektorová funkce devinovaná aspoň na M a mající tam spojité parciální derivace. Potom platí*

$$\int_L \vec{f} = \int_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

(kde napravo je integrál přes podmnožinu roviny).

Důkaz: Z definice křivky v [1.1] snadno zjistíme, že množinu M můžeme rozdělit na „trojúhelníky“ s nejvýš jednou křivou stranou podobně jako kružnici na obr. XXVI.2(a)

Takové trojúhelníky jsou vnitřními oblastmi svých obvodů a když tyto orientujeme proti směru hodinových ručiček, vidíme, že jejich části ležící na L se sčítají ve smyslu definice [1.7] právě na tuto orientovanou křivku, zatímco uvnitř M se „trojúhelníky“ vždy po dvou setkávají a v místě setkání jsou příslušné části obvodů orientovány opačně (viz obr. XXIV.2(b)). Z formulí [3.4] a [3.5] tedy vidíme, že větu stačí dokázat pro takové trojúhelníky. Dokážeme ji třeba pro případ z obr. XXIV.3.

kde křivka L_2 je graf prosté funkce g. Máme representace

$$\begin{aligned} L_1 &: \varphi_1 : \langle a, c\rangle \to \mathbb{E}_2, \varphi_1(t) = (t, b), \\ -L_2 &: \varphi_2 : \langle a, c\rangle \to \mathbb{E}_2, \varphi_2(t) = (t, g(t)), \\ -L_3 &: \varphi_3 : \langle b, d\rangle \to \mathbb{E}_2, \varphi_3(t) = (a, t). \end{aligned}$$

Podle [3.4] a [3.5] je tedy $\varphi_1' = (1, 0), \varphi_2' = (1, g'(t)), \varphi_3' = (0, 1)$

$$\int_L \vec{f} = \int_{L_1} \vec{f} + \int_{L_2} \vec{f} + \int_{L_3} \vec{f} = \int_a^c f_1(t,b)dt - \int_a^c f_1(t,g(t))dt - \int_a^c f_2(t,g(t))dt - \int_b^d f_2(a,t)dt.$$

Označme $h : \langle b, d\rangle \to \mathbb{R}$ funkci inverzní k funkci g a zaveďme ve třetím integrálu substituci $\tau = g(t)$ (a tedy $d\tau = g'(t)dt$). Potom, po sjednocení značení pro proměnnou dostneme

$$\int_L \vec{f} = \int_a^c \left(f_1(t,b) - f_1(t,g(t))\right)dt + \int_b^d \left(f_2(h(t),t) - f_2(a,t)\right)dt. \tag{1}$$

Podle Fubiniovy věty a „Základní věty analysy“ (na zbytku $\langle a, c\rangle \times \langle b, d\rangle$ dodefinujeme f nulou) počítejme dále

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \int_a^c \left(\int_b^d \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 &= \int_a^c \left(f_1(x_1, g(x_1)) - f_1(x_1, b)\right) dx_1, \\ \int_M \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \int_b^d \left(\int_a^c \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 &= \int_b^d \left(f_2(h(x_2), x_2) - f_2(a, x_2)\right) dx_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Srovnáním hodnot z (1) a (2) dostáváme

$$\int_L \vec{f} = \int_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

□

5.4 VĚTA: *((Zesílení Greenovy formule) :) Pokud jsou funkce f_1, f_2 omezené a má-li výraz napravo smysl, platí formule z věty [5.3] i tehdy, není-li funkce f v jednom bodě vnitřní oblasti křivky L definována.*

Důkaz: Kolem kritického bodu opišme kružnici $K(n)$ o poloměru $\frac{1}{n}$ (začneme teprve takovým n, aby se příslušný kruh vešel do M), tentokrát orientovanou ve směru hodinových ručiček. Viz obr. XXIV.4. Položme $V = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$.

Při označení z obrázku máme podle [5.3]

$$\int_{M_1(n)\cup M_2(n)} V = \int_{M_1(n)} V + \int_{M_2(n)} V =$$
$$\left(\int_{L_1} \vec{f} + \int_{L_3(n)} \vec{f} + \int_{K_1(n)} \vec{f} + \int_{L_4(n)} \vec{f}\right) + \left(\int_{L_2} \vec{f} + \int_{L_4(n)} \vec{f} + \int_{K_2(n)} \vec{f} + \int_{L_3(n)} \vec{f}\right) =$$
$$\int_L \vec{f} + \int_{K(n)} \vec{f}.$$

Vzhledem k tomu, že délka $K(n)$ klesá pode všechny meze, je při $n \to \infty$ limita pravé strany rovna $\int \vec{f}$, limita levé strany je rovna $\int_M V$ podle [XXIII-1.5](b) (máme totiž $M\backslash\{kritick\acute{y}\,bod\} = bigcup_{n=1}^{\infty} M_1(n) \cup M_2(n)$).
□

III Poznámky o plošném integrálu

V této kapitole se omezíme jen na několik poznámek o dvojrozměrném plošném integrálu v třírozměrném prostoru.

III.1 Plocha a její obsah

1.1 Plochou budeme rozumět útvar získaný skládáním z částí daných zobrazeními

$$\varphi : U \to \mathbb{E}_3,$$

kde U je otevřená (obvykle souvislá) podmožina $\mathbb{E}_2$. Pokud to bude možné, omezíme se zde na případ jediné takové části.

1.2 Především budeme, asi s politováním, nuceni zavrhnout jeden nápad jak přistupovat k definici obsahu plochy. Podobně jako u délky křívky se nabízí aproximace plochy rovnými ploškami jako na obr. XXV-1 a za obsah dané plochy vzít suprémum vzniklých ploch. To bohužel nedělá dobrotu. Představte si třeba válcovou plochu aproximovanou soustavou trojúhelníků tak jak je naznačeno na obr XXV-2(a).

Při tom volme dělení výšky podstatně jemnější než dělení kružnic (dejme tomu, nechť $d \leq v^2$, kde v je největší vzdálenost bodu na úsečce aproximující kus vodorovné kružnice od této kružnice). Zatím co aproximací křivky stále jemnější lomenou čarou je čím dál tím hladší, naše aproximace válcové plochy bude něco jako čím dál tím ostřejší pilník s plochou rostoucí nade všechny meze. A to šlo o plochu, kterou lze narovnat, takže rozumný konečný obsah má.

1.3 Postup, který funguje je založen na trochu jiné představě (něco jako „infinitesimální šupiny“). Viz obr. XXV-3.

Než napíšeme vhodnou formuli, zavedeme nejprve pojem *vektorového součinu* dvou vektorů v trojrozměrném prostoru. Je-li

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\,, \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\,,$$

zavádíme

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Tvrzení: $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}$ *a je to obsah rovnoběžníka, určeného vektory* $\vec{a}, \vec{b}$.

Důkaz: Podle sinové a cosinové věty snadno zjistíme, že

(1) obsah zmíněného rovnoběžníka je $\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot |\sin\alpha|$,

(2) $\left|\vec{a}\vec{b}\right| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\alpha$

kde α je úhel, který $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají.

Pro obsah tedy především dostaneme formuli $\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot |\sin\alpha| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}$.

První rovnost: Budeme počítat dvojmoc pravé strany. Dostaneme

$$\begin{gathered}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 = \\ a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 \\ -a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 = \\ \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 + \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right)^2 + \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2.\end{gathered}$$

□

1.4 Po tom co bylo řečeno asi již není zcela nejasná motivace následující definice **plošného integrálu I. druhu** z funkce f přes plochu (S) danou representací $\varphi : U \to \mathbb{E}_3$:

$$\int_{(S)} f = \int_U f\left(\vec{\varphi}\left(t_1, t_2\right)\right) \cdot \left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t_2}\right\| dt_1 dt_2$$

Obsah dané plochy je $\int_{(S)} const_1$, to jest,

$$\int_U \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2} \right\| dt_1 dt_2$$

1.5 Plošný integrál II. druhu z vektorové funkce $\vec{f}$ se zavádí formulí

$$\int_{(S)} \vec{f} = \int_U \vec{f}\left(\varphi\left(t_1, t_2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2$$

(součin uprostřed je, samozřejmě, skalární součin). Je dobré si uvědomit, že $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ je determinant matice o řádcích $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, takže tento integrál je vlastně

$$\int_U det \left(\vec{f} o \vec{\varphi}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2.$$

1.6 Podobně jako u křivkových integrálů je integrál I. druhu možno vyjádřit pomocí integrálu II. druhu: Místo f integrujeme

$$\vec{f} = f \cdot \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2} \right\|}.$$

III.2 Stokesova formule

2.1 Pro vektorovou funkci $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ zobrazující část $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$ se zavádí její *rotace* formulí

$$rot \vec{f} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

(jako bychom operátorem $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ „vektorově vynásobili“ funkci f).

2.2

VĚTA: *(Stokesova formule) : Buď φ representace plochy (S), nechť má spojité parciální derivace 2. řádu. Buď (N) část této plochy ohraničená křivkou K. Potom platí*

$$\int_K \vec{f} = \int_{(N)} rot \vec{f}.$$

Důkaz: V oblasti U si nejprve vymezme křivkou L danou representací ψ oblast M, která se pak zobrazí na N. Tedy je K dána representací $\varphi o \psi$. Pro $\int_K \vec{f}$ dostaneme použitím formule pro derivaci složené funkce

$$\int_K \vec{f} = \int_a^b \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{3} f_i\left(\varphi\left(\psi\left(t\right)\right)\right) \cdot \frac{\partial \varphi_i\left(\psi\left(t\right)\right)}{\partial t_j} \right) \psi_j'\left(t\right)\, dt,$$

takže definujeme-li

$$\vec{g} : U \to \mathbb{E}_2$$

předpisem

$$\vec{g}\left(t_1, t_2\right) = \sum_{i=3}^{3} f_i\left(\varphi\left(t_1, t_2\right)\right) \cdot \frac{\partial \varphi_i\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_j},$$

máme podle Greenovy formule

$$\int_K \vec{f} = \int_L \vec{g} = \int_M \left(\frac{\partial g_2}{\partial t_1} - \frac{\partial g_1}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2.$$

Opět s použitím pravidla o derivacích složené funkce dostaneme

$$\frac{\partial g_j}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \left(f_i o \varphi\right)}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} + f_i \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_k \partial t_j} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} + f_i \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_k \partial t_j} \right)$$

a tedy

$$\frac{\partial g_2}{\partial t_1} - \frac{\partial g_1}{\partial t_2} = \sum_{i,p=1 i\neq p}^{3} \frac{\partial f\left(\vec{\varphi}\left(t_1, t_2\right)\right)}{\partial x_p} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial t_2} \right).$$

Sečteme-li dvojmou sumu napravo v pořadí

$$(p, i) = (2,3), (3,2), (3,1), (1,3), (1,2), (2,1),$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \ldots = \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) \cdot \left(\tfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \tfrac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}\right) + \\ + \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \cdot \left(\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \tfrac{\partial \varphi_3}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}\right) + \\ + \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \cdot \left(\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \tfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}\right) = rot\vec{f} \cdot \left(\tfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_1} \times \tfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t_2}\right). \end{aligned}$$

□

III.3 Několik poznámek

3.1 Stokesovu formuli můžeme považovat za zobecnění Greenovy formule: Greenova formule je totiž speciální případ Stokesovy pro "rovnou plochu" M.

Skutečnou analogií Greenovy věty v třírozměrném prostoru je však

Gaussova formule: Buď $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ vektorová funkce definovaná na třírozměrném útvaru V ohraničeném plochou (S). Potom platí

$$\int_{(S)} \vec{f} = \int_V div\vec{f},$$

kde $divf = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$.

3.2 O důkaz této formule se zde raději nebudeme pokoušet ani ve speciálních případech. To proto, že bychom museli dát nejprve smysl pojmu orientace plochy, který jsme zatím zamlčeli (a i ve formulaci Stokesovy věty jsme v té věci podváděli; neřekli jsme, že orientace křivky L musí být v jakémsi vztahu k orientaci plochy (N)). Tak jednoduše jako odkazem na směr hodinových ručiček se to odbýt nedá.

3.3 Všimněte si podobnosti Gaussovy a Greenovy formule: V obou případech se jedná o zákonitost tvaru

$$\int_{\partial X} f = \int_X \partial f,$$

kde ∂ nalevo je hranice útvaru X a ∂ napravo je nějaký vhodný diferenciální operátor. Jiným případem (a základem pro všechny ostatní) je "základní věta analysy"

$$f(b) - f(a) = \int_{\langle a,b\rangle} \frac{df}{dx}\, dx.$$

Rozdíl $f(b) - f(a)$ je totiž cosi jako "orientovaná suma" přes hranici $\{a, b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zákonitosti tohoto typu při vhodných definicích diferenciálních operátorů pro pravé strany platí v každé dimensi.

IV Základy komplexní analysy

V této kapitole budeme s tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ nakládat jako s euklidovskou rovinou. To jest, budeme volně přecházet od komplexního čísla k jeho representaci dvojicí reálných čísel a zpět; $\mathbb{C}$ budeme považovat za metrický prostor s běžnou metrikou z $\mathbb{E}_2$, což se ovšem v komplexní interpretaci projeví jako $\varrho(u,v) = \|u - v\|$.

IV.1 Derivace podle komplexní proměnné. Cauchy-Riemanovy podmínky.

1.1 Buď $f : U \to \mathbb{C}$ funkce definovaná na nějaké otevřené podmnožině roviny $\mathbb{C}$. Stejně jako v $\mathbb{R}$ (a jako v každém tělese opatřeném metrikou) můžeme studovat limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Existuje-li, mluvíme o ní (opět) jako o derivaci funkce f v bodě z, a existuje-li ve všech bodech nějaké podmnožiny $M \subseteq U$, mluvíme o vzniklé komplexní funkci na M jako o *derivaci funkce f na množině M*. Opět užíváme označení

$$f'(z), f', \frac{df}{dz}.$$

Nemusím jistě říkat, co jsou pak parciální derivace v případě funkce $f : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{C}, U_i \subseteq \mathbb{C}$.

1.2 Například pro funkci $f(z) = z^2$ dostáváme opět

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hz + h^2}{h} = 2z,$$

tedy, $(z^2)' = 2z$.

Zkusme spočítat derivaci funkce $f(z) = \overline{z}$ ($\overline{z}$ je číslo komplexně sdružené k z), tedy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Tato limita neexistuje: blížíme-li se k 0 po imaginární ose, máme stále hodnotu -1, po reálné ose máme stále hodnotu 1.

Tento druhý příklad ukazuje, že v komplexním oboru se může velmi snadno stát, že derivace neexistuje, a že se to může stát i s funkcí, která je geometricky velmi uspokojivá: $z \to \overline{z}$ je zrcadlení podle reálné osy, zobrazení tak hladké, že již nic hladšího ani nemůže být. Intuice o existenci derivace jako vyjádření hladkosti se tedy nemůžeme držet. Zde je to mnohem silnější vlastnost.

1.3 Pro komplexní proměnnou z píšme $z = x + iy$ a vyjádřeme komplexní funkci f v reálných funkcích dvou proměnných jako

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y).$$

VĚTA: *Nechť má funkce f derivaci v bodě $z = x + iy$. Potom tam funkce P, Q mají parciální derivace a platí*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pro derivaci f' platí formule

$$f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Důkaz: Máme

$$\frac{1}{h}\left(f(z+h) - f(z)\right) = \frac{1}{h_1 + ih_2}\left(P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y)\right) + \frac{1}{h_1 + ih_2}\left(Q(x+h_1, y+h_2) - Q(x,y)\right).$$

Nechť naše derivace, t.j. limita našeho výrazu pro $h \to 0$ existuje. Potom musí tím spíš existovat pro $h_1 \to 0$ při $h_2 = 0$ a pro $h_2 \to 0$ při $h_1 = 0$. V prvním případě dostáváme

$$f'(z) = \lim \frac{1}{h_1}\left(P(x+h,y) - P(x,y)\right) + i \lim \frac{1}{h_1}\left(Q(x+h,y) - Q(x,y)\right) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y),$$

v druhém pak obdobně

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

□

1.4 Rovnostem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

se říká *Cauchy-Riemanovy podmínky*. Podle 1.3 jsou nutné k existenci derivace. Vzápětí uvidíme, že jsou v trochu zesílené podobě také postačující.

VĚTA: *Nechť $f(z) = P(x,y)+iQ(x,y)$, nechť P, Q mají v nějaké otevřené $U \subseteq C$ spojité parciální derivace a nechť tam jsou splněny Cauchy-Riemanovy podmínky. Potom má funkce f na množině U derivaci.*

Důkaz: Máme

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) = \\
\tfrac{1}{h}(P(x+h_1, y+h_2) - P(x,y) + iQ(x+h_1, y+h_2) - iQ(x,y)) = \\
\tfrac{1}{h}(P(x+h_1, y+h_2) - P(x+h_1, y) + P(x+h_1, y) - P(x,y) + \\
i(Q(x+h_1, y+h_2) - Q(x+h_1, y)) + i(Q(x+h_1, y) - Q(x,y)) = \\
\tfrac{1}{h}\left(\tfrac{\partial P(x+h_1, y+\alpha h_2)}{\partial y} h_2 + \tfrac{\partial P(x+\beta h_1, y)}{\partial x} h_1 + i\tfrac{\partial Q(x+h_1, y+\gamma h_2)}{\partial y} h_2 + i\tfrac{\partial (x+\delta h_1, y)}{\partial x} h_1\right) = \\
\tfrac{1}{h}\left(-\tfrac{\partial Q(x+h_1, y+\alpha h_2)}{\partial x} h_2 + \tfrac{\partial P(x+\beta h_1, y)}{\partial x} h_1 + i\tfrac{\partial P(x+h_1, y+\gamma h_2)}{\partial x} + i\tfrac{\partial Q(x+\delta h_1, y)}{\partial x} h_1\right) = \\
\tfrac{1}{h}\left(\tfrac{\partial P(x+h_1, y+\gamma h_2)}{\partial x}(h_1 + ih_2) + i\tfrac{\partial Q(x+\delta h_1, y)}{\partial x}(h_1 + ih_2) + \left(\tfrac{\partial P(x+\beta h_1, y)}{\partial x}\right.\right. \\
\left.\left. - \tfrac{\partial P(x+h_1, y+\gamma h_2}{\partial x}\right) h_1 - \left(\tfrac{\partial Q(x_1+h_1, y+\alpha h_2)}{\partial x} - \tfrac{\partial Q(x+\delta h_1, y}{\partial x}\right) h_2\right) = \\
\tfrac{\partial P(\cdots)}{\partial x} + i\tfrac{\partial Q(\cdots)}{\partial x} + (\text{první rozdíl})\tfrac{h_1}{h} + (\text{druhý rozdíl})\tfrac{h_2}{h}.
\end{gathered}$$

Jelikož $\left\|\frac{h_i}{h}\right\| \leq 1$ a jelikož jsou parciální derivace spojité, má tento výraz limitu pro $h \to 0$, totiž

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

□

1.5 Komplexní funkci splňující v oboru U Cauchy-Riemannovy podmínky se spojitými parciálními derivacemi se říká *funkce* (v oboru U) *holomorfní.*

Později uvidíme, že to znamená totéž jako že f má v U derivaci, zatím ovšem nevíme, zda u funkce s derivací jsou příslušné parciální derivace spojité.

1.6 Následující větu dokážeme asi trochu podrobněji, než je po tom co čtenář již ví nutno. Pocvičíme se přitom v práci s Cauchy-Riemannovými podmínkami.

VĚTA: *Buď $f(\gamma, z)$ spojitá komplexní funkce dvou komplexních proměnných, holomorfní v proměnné γ v nějaké oblasti. Potom v této oblasti pro komplexní křivkový integrál platí*

$$\frac{d}{d\gamma}\int_L f(\gamma, z)dz = \int_L \frac{\partial f(\gamma, z)}{\partial \gamma}dz.$$

Důkaz: Označme $F(\gamma) = \int f(\gamma, z)dz$. Podobně jako dříve pišme $f(\gamma, z) = P(\alpha, \beta, x, y) + iQ(\alpha, \beta, x, y)$ při $\gamma = \alpha + i\beta$. Podle XXIV.4.4 máme

$$F(\gamma) = \mathcal{P}(\alpha, \beta) + i\mathcal{Q}(\alpha, \beta),$$

kde

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}(\alpha, \beta) = (II)\int(P(\alpha, \beta, x, y), -Q(\alpha, \beta, x, y)), \\
\mathcal{Q}(\alpha, \beta) = (II)\int(Q(\alpha, \beta, x, y), P(\alpha, \beta, x, y)).
\end{gathered}$$

Jelikož je f holomorfní v proměnné γ, platí

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q}{\partial \beta}, \frac{\partial P}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial \alpha}$$

a tedy dostáváme podle XXIV.3.8

$$(1)\qquad \begin{aligned}\tfrac{\partial\mathcal{P}}{\partial\alpha} &= (II)\textstyle\int\left(\tfrac{\partial P}{\partial\alpha},-\tfrac{\partial Q}{\partial\alpha}\right) = (II)\int\left(\tfrac{\partial Q}{\partial\beta},\tfrac{\partial P}{\partial\beta}\right) = \tfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\beta},\\ \tfrac{\partial\mathcal{P}}{\partial\beta} &= (II)\textstyle\int\left(\tfrac{\partial P}{\partial\beta},-\tfrac{\partial Q}{\partial\beta}\right) = -(II)\int\left(\tfrac{\partial Q}{\partial\alpha},\tfrac{\partial P}{\partial\alpha}\right) = -\tfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\alpha}\end{aligned}$$

a tedy je $F(\gamma)$ v oboru U holomorfní a má tam derivaci. Konečně podle 1.3 máme $\frac{\partial f}{\partial\gamma} = \frac{\partial P}{\partial\alpha} + i\frac{\partial Q}{\partial\alpha}$ a tedy podle formulí (1) a znovu 1.3,

$$\int\frac{\partial f(\gamma,z)}{\partial\gamma}dz = (II)\int\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha},-\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right) + i(II)\int\left(\frac{\partial Q}{\partial\alpha},\frac{\partial P}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\alpha} = \frac{dF}{d\gamma}.$$

□

IV.2 Komplexní křivkový integrál a primitivní funkce

2.1

VĚTA: *Buď L orientovaná prostá uzavřená křivka taková, že na celé její vnitřní oblasti má komplexní funkce f derivaci. Potom je*

$$\int_L f = 0.$$

Důkaz: Označme opět $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$. Podle XXIV.4.4 máme

$$\int_L = II\int_L(P,-Q) + i(II)\int_L(Q,P)$$

a podle Greenovy formule dále

$$\cdots = \int_M\left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial\gamma}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial\gamma}\right).$$

Jelikož musí být splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, jsou oba sčítance nulové.
□

2.2 Následkem toho, mají-li dva orientované oblouky L_1, L_2 stejný počáteční a koncový bod, neprotínají-li se nikde mimo tyto dva body a má-li funkce f derivaci všude v oblasti mezi nimi (viz obr. XXVI-1) platí

$$(1)\qquad \int_{L_1} f = \int_{L_2} f$$

(neboť $\int_{L_1+(-L_2)} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$).

Nemusíme se ovšem omezovat na oblouky, které se (kromě konců) neprotínají. Protnou-li se konečněkrát platí formule (1) též (viz obr XXVI-2: Aplikujte formuli postupně na oblast M_i.). S případem nekonečně mnoha protnutí bychom si zatím nevěděli rady a proto se v následující definici raději omezíme na lomené čáry.

2.3 Nechť má f derivaci v konvexní oblasti U (konvexní proto, abychom měli zaručeno, že derivace bude mezi čarami vedoucími touto oblastí vždy existovat). Podle 2.2 pak integrál z f po lomenné čáře vedoucí touto oblastí závisí pouze na koncových bodech a, b. Pišme tedy

$$\int_a^b f(z)dz$$

pro integrál přes libovolnou orientovanou lomenou čáru vedoucí oblastí U, s počátečním bodem a a koncovým bodem b. Zvolme a pevné a definujme pro $u \in U$

$$F(u) = \int_a^u f(z)dz.$$

VĚTA: *Funkce F je v oblasti U primitivní k funkci f. To jest $F'(u)$ vždy existuje a rovná se $f(u)$.*

Důkaz: Lomenou čáru od a k $u + h$ můžeme vést např. tak, že ji nejprve vedeme od a k u a odtud po úsečce

$$\varphi : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{C}, \varphi(t) = u + th.$$

Máme tedy

$$F(u + h) - F(u) = \int_a^{u+h} f - \int_a^u f = \int_a^u + \int_u^{u+h} - \int_a^u = \int_u^{u+h} f$$

a poslední výraz můžeme počítat jako Riemannův integrál

$$\int_0^1 f(u + th)hdt$$

(máme $\varphi'(t) = h$; pozor, zde se jedná o dvě obyčejné reálné derivace). Tedy máme

$$\frac{1}{h}\left(F(u + h) - F(u)\right) = \int_0^1 f(u + th)dt = \int_0^1 P(u + th)dt + i\int_0^0 Q(u + th)dt,$$

což se podle věty o střední hodnotě (XV.4) blíží k $P(u) + iQ(u) = f(u)$.

□

IV.3 Cauchyova furmule

3.1

Lemma: *Buď K kružnice se středem v z, orientovaná proti směru hodinových ručiček. Potom platí*

$$\int_K \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$$

Důkaz: Representujme K zobrazením

$$\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{C}, \varphi(t) = z + z(\cos t + i \sin t)$$

(všimněte si, že na poloměru záležet nebude). Potom máme $\varphi'(t) = r(-\sin t + i \cos t)$ a tedy

$$\int_K \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_0^{2\pi} \frac{r(-\sin t + i\cos t)}{r(\cos t + i\sin t)} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

□

3.2 Srovnejte s 2.1 a všimněte si, jakou roli sehrálo to, že integrovaná funkce není uvnitř kružnice (a to v jednom jediném bodě) vždy definovaná.

3.3

Věta: *(Cauchyova formule) : Nechť funkce f má derivaci v kruhu ohraničeném kružnicí K se středem z orientovanou proti směru hodinových ručiček. Potom platí*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z).$$

Důkaz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{\xi - z} dz + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

První z integrálů na pravé straně má podle 4.1 hodnotu $f(z)$. Na druhý použijeme Greenovu formuli v zesílené podobě z XXIV.5.4. Funkce $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ sice v bodě z není definována, dá se tam však spojitě dodefinovat derivací a je tedy omezená. Všude jinde derivaci má. Tedy je druhý integrál roven nule.

□

3.4

VĚTA: *Má-li komplexní funkce komplexní proměnné v nějaké oblasti derivaci, má tam derivace všech řádů.*

Důkaz: Podle 1.6 můžeme výraz z Cauchyovy formule (opakovaně) derivovat podle z za integračním znamením a dostáváme

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi.$$

□

3.5

DŮSLEDEK: *Funkce f je holomorfní v oblasti U právě když tam má derivaci.*

(Vzpomeňte si na 1.5. Jde o to, ukázat, že má-li f v U derivaci, mají tam P, Q spojité paciální derivace. To nyní snadno usoudíme z toho, že f' má derivaci f'' a je tedy spojitá.)

3.6

DŮSLEDEK: *Funkce f má v nějakém okolí bodu z derivaci právě když má v nějakém okolí bodu z primitivní funkci.*

(Má-li primitivní funkci F, existuje $f' = F''$; má-li derivaci, splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a má tedy podle 2.3 primitivní funkci.)

3.7

POZNÁMKY:

1. *Tvrzení 4.3 a 4.5 silně kontrastují se situací v reálné analyse.*
2. *Uvidíme, že Cauchyova formule hraje v komplexní analyse roli velmi podobnou té, kterou má věta o střední hodnotě (o přírustku funkce) v reálné analyse. Je to však v jistém smyslu formule mnohem silnější a proto jsou některé věci (např. Taylorův rozvoj) mnohem snazší.*
3. *Uvědomte si, jakou roli hrálo to, že $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ utíká do nekonečna v bodě z. Všimněte si, že se vše soustřeďuje do libovolně malého okolí tohoto bodu.*
4. *To, že K v Cauchyově formuli byla kružnice je nepodstatné. Stejné tvrzení platí pro libovolnou uzavřenou křivku L, ktera v oblasti U oběhne bod z. Viz obr. XXVI-3. Je totiž $\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} = \left(\int_{L_1} + \int_{L_3} + \int_{L_4} + \int_{-K_1}\right) + \left(\int_{L_2} + \int_{-L_4} + \int_{-L_3} + \int_{-K_2}\right) + \int_K = \int_K$, neboť výrazy v závorkách dají nuly.*

IV.4 Taylorova formule, mocninné řady, věta o jednoznačnosti

4.1

VĚTA: *(věta o Taylorově rozvoji) : Nechť je f holomorfní v nějakém okolí bodu a. Potom v dostatečně malém okolí bodu a platí*

$$f(z) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n + \cdots.$$

Důkaz: Máme

(1)
$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}.$$

Vezměme kružnici K o středu a a poloměru r tak, aby v celém příslušném kruhu měla funkce f derivaci. Buď z takové, že $\|z - a\| < r$, takže $\left\|\frac{z-a}{\xi-a}\right\| < 1$. Z (1) dostaneme

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a}\left(1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n + \cdots\right) =$$
$$\frac{1}{\xi-a} + (z-a)\cdot\frac{1}{(\xi-a)^2} + (z-a)^2\cdot\frac{1}{(\xi-a)^3} + \cdots + (z-a)^n\cdot\frac{1}{(\xi-a)^{n+1}} + \cdots.$$

Tedy z Cauchyovy formule dostaneme (to, že můžeme integraci provádět přes jednotlivé sčítance snadno plyne z Lebesgueovy věty: jedná se o integrál přes kompaktní interval a všechny zúčastněné funkce jsou omezené):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{\xi-z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi+(z-a)\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi+\cdots+(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi+\cdots.$$

Podle formul v důkazu věty 3.4 je

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

□

4.2 Zjistili jsme tedy, že má-li komplexní funkce derivaci, dá se lokálně rozvíjet do mocninných řad.

Projděte si nyní důkazy XI.3.4, XI.5.1 a XI.5.3. Snadno zjistíte, že je můžete doslova zopakovat i v komplexním případě (rozdíl je ovšem v tom, že trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu je nyní hlubší fakt než v reálném případě). Platí tedy zejména

TVRZENÍ: *(Komplexní) mocninná řada*

$$(*)\qquad\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$$

konverguje absolutně a stejnoměrně v otevřeném kruhu o poloměru

$$r=\liminf\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

a diverguje mimo uzavřený kruh o tomto poloměru. Řada $\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(x-a)^{k-1}$ *má stejný poloměr korvengence jako řada* $(*)$*. Řadu* $(*)$ *je možno derivovat člen po členu.*

4.3 Mocninné řady

$$\begin{aligned}e^z&=1+\tfrac{z}{1!}+\tfrac{z^2}{2!}+\cdots\\ \sin z&=z-\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^5}{5!}-\cdots\\ \cos z&=1-\tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^4}{4!}-\cdots\end{aligned}$$

považujme nyní za definice $e^z,\sin z,\cos z$ pro $z\in\mathbb{C}$. Platí tedy formule

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

a odtud dále

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

(Nyní vám možná bude postup z XIX.4.6 připadat přirozenější.)

4.4

LEMMA: *Nechť jsou* f,g *definovány v nějaké otevřené množině* U*, bod* $c\in U, c=\lim c_n, c_n\neq c$*. Nechť je* $f(c_n)=g(c_n)$ *pro všechna* n*. Potom* $f=g$ *v nějakém okolí bodu* c*.*

Důkaz: Stačí dokázat, že je-li $f(c_n)=0$ pro všechna n, je $f\equiv 0$ v nějakém okolí bodu c.

Jelikož je c uvnitř definiční oblasti a f má tedy v c derivaci, můžeme rozvíjet do Taylorovy řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-c)^k.$$

Není-li f v žádném okolí bodu c identicky nulové, nejsou všechny koeficienty a_k nulové. Buď a_n první nenulový. Potom je v dost malém okolí bodu c

$$f(z)=(z-c)^n\cdot(a_n+a_{n+1}(z-c)+a_{n+2}(z-c)^2+\cdots).$$

Funkce v závorce je spojitá (uvědomte si proč) a v bodě c nabývá nenulové hodnoty. Funkce $(z-c)^n$ nabývá hodnoty 0 jen v bodě c. Tedy $f(z)$ nabývá v nějakém okolí V bodu c hodnoty 0 jen v bodě c. To je ve sporu s faktem, že c_k musí pro dost velké k ležet ve V.

□

VĚTA: *Nechť jsou f, g definovány na nějaké souvislé otevřené množině U, nechť $c \in U, c = \lim c_n, c \neq c_n$, a nechť $f(c_n) = g(c_n)$ pro všechna n. Potom je $f = g$ na celé množině U.*

Důkaz: Označme
$$M = \{z \in U | f(u) = g(u) \text{ v nějakém okolí bodu } z\}.$$
M je zřejmě otevřená a podle Lemmatu je neprázdná a uzavřená. Je-li tedy U souvislá, je $M = U$.
□

IV.5 Liouvilleova věta a základní věta algebry

5.1

VĚTA: *(Liouvilleova) :Nechť je f holomorfní a omezená v celém oboru $\mathbb{C}$. Potom je f konstantní.*

Důkaz: Podle formule z 3.4 máme pro libovolnou kružnici K se středem v bodě z
$$f'(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$
Buď $|f(z)| \leq A$ pro všechna z. Zvolme za K kružnici o poloměru r. Potom je na K
$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right| \leq \frac{A}{r^2}$$
a podle XXIV.4.5 dostáváme
$$|f'(z)| \leq 4 \cdot \frac{2!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{A}{r^2} = \frac{8A}{r}.$$
Jelikož r mohlo být libovolné, musí být $f'(z) \equiv 0$ a tedy je f konstantní.
□

5.2

VĚTA: *(tzv základní věta algebry) : Každý nekonstantní polynom má v komplexním oboru kořen.*

Důkaz: Nechť polynom
$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$
nemá kořen. Potom je funkce
$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$
definována na celém $\mathbb{C}$. Položme
$$R = 2n \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|, 1).$$
Pro $|z| \geq R$ máme
$$\begin{array}{rcl} |p(z)| & \geq & |z|^n - \left| a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \right| \quad \geq \\ & \geq & |z|^n - |z|^{n-1} \cdot \frac{1}{2} R = |z|^{n-1} \cdot \frac{1}{2} R \quad \geq \quad R^n \end{array}$$
a tedy
$$|f(z)| \leq \frac{2}{R^n}.$$
Na kompaktní množině $\{z | |z| \leq R\}$ je $f(z)$ omezená prostě proto, že je spojitá. Podle Liouvilleovy věty je tedy f, a tedy i p, konstantní.
□

IV.6 Poznámky o konformním zobrazení

6.1 Buď $f : U \to \mathbb{C}$ (U otevřená v $\mathbb{C}$) holomorfní zobrazení, které chápáno jako zobrazení z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_2$ je regulární. Tedy (píšeme opět $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$) je determinant

$$Df = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2$$

předpokládám nenulový.

6.2 Buďte za předpokladu z 6.1 $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ dvě křivky v U, označme $\vec{\Phi} = f\mathrm{o}\vec{\varphi}, \vec{\Psi} = f\mathrm{o}\vec{\psi}$.

LEMMA: *Pro skalární součin tečných vektorů platí*

$$\vec{\Psi}' \cdot \vec{\Phi}' = Df \cdot (\vec{\varphi}' \cdot \vec{\psi}').$$

Důkaz: Máme

$$\Phi_1'\Psi_1' + \Phi_2'\Psi_2' =$$
$$\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\varphi_1' + \tfrac{\partial P}{\partial y}\varphi_2'\right)\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\psi_1' + \tfrac{\partial P}{\partial y}\psi_2'\right) + \left(-\tfrac{\partial P}{\partial y}\varphi_1' + \tfrac{\partial P}{\partial x}\varphi_2'\right)\left(-\tfrac{\partial P}{\partial y}\psi_1' + \tfrac{\partial P}{\partial x}\psi_2'\right) =$$
$$(\varphi_1'\psi_1' + \varphi_2'\psi_2')\left(\left(\tfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2\right).$$

□

6.3

VĚTA: *Holomorfní regulární zobrazení zachovává úhly.*

Důkaz: Pro cosinus úhlu sevřeného křivkami $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ máme formuli

$$a = \frac{\vec{\varphi}' \cdot \vec{\psi}'}{\left\|\vec{\varphi}'\right\| \cdot \left\|\vec{\psi}'\right\|}.$$

Podle lemmatu je pro $\vec{\Phi} = f\mathrm{o}\vec{\varphi}, \vec{\Psi} = f\mathrm{o}\vec{\psi}$

$$\frac{\vec{\Phi}' \cdot \vec{\Psi}'}{\left\|\vec{\Phi}'\right\| \cdot \left\|\vec{\Psi}'\right\|} = \frac{Df \cdot (\vec{\varphi}' \cdot \vec{\psi}')}{\sqrt{Df} \cdot \left\|\vec{\varphi}'\right\| \cdot \left\|\vec{\psi}'\right\|} = a.$$

□

6.4 Zobrazení zachovávající úhly se obvykle nazývá *konformní zobrazení*. Všimněte si, že podmínka regularity je ve větě 6.3 velmi podstatná. Prostudujte třeba zobrazení $f(z) = z^2$ v bodě $z = 0$. Uvidíte, že se tam úhly zdvojnásobují.

6.5 Otázku, zda naopak konformní zobrazení musí být holomorfní je možno okamžitě zodpovědět záporně: Zobrazení

$$z \to \bar{z}$$

je dokonce isometrie a holomorfní není. Ale bylo by trochu laciné zbavit se otázky tímto argumentem. Ve skutečnosti je to to jediné co se v podstatě může stát. Jestliže totiž zobrazení $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ zachovává úhly (stačí, když zachovává kolmost), platí buď Cauchy-Riemannovy podmínky nebo podmínky

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Skutečně, nechť (u,v) jsou derivace representace $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$. Po transformaci zobrazením f dostaneme vektor

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial P}{\partial y}v, \frac{\partial Q}{\partial x}u + \frac{\partial Q}{\partial y}v\right).$$

Dosaďme za (u,v) vzájemně kolmé vektory $(a,b),(-b,a)$ a skalárně vynásobme výsledky:

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}a+\tfrac{\partial P}{\partial y}b,\tfrac{\partial Q}{\partial x}a+\tfrac{\partial Q}{\partial y}b\right)\left(-\tfrac{\partial P}{\partial x}b+\tfrac{\partial P}{\partial y}a,-\tfrac{\partial Q}{\partial x}b+\tfrac{\partial Q}{\partial y}a\right)= \\ (a^2-b^2)\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial P}{\partial y}+\tfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial Q}{\partial y}\right)+ab\left(\left(\tfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\tfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^2-\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2-\left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right).\end{gathered}$$

Volbami $(a,b)=(1,0)$ a $(1,1)$ dostáváme podmínky

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial P}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial P}{\partial y}+\tfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial Q}{\partial y}=0, \\ \left(\tfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\tfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^2=\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^2.\end{gathered}$$

Je-li třeba $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq 0$ můžeme napsat

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a dosazením do první rovnice získáme

$$\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\text{ tedy }\frac{\partial Q}{\partial y}=-\lambda\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Dosaďme do druhé rovnice:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2=\lambda^2\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2$$

a tedy

$$(1+\lambda^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right)=0$$

a tedy (λ je reálné)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2.$$

Je-li $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, dá první rovnice $\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial Q}{\partial y}$, je-li $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$, dostaneme $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$.

V Základní úlohy variačního počtu

V.1 O jaký typ úloh jde

1.1 Ve známé Didonině úloze jde o to vymezit v rovině plochu co největšího obsahu křivkou co nejkratší délky. Nebo, jinými slovy, najít obrazec o co největší ploše při pevně daném obvodu.

1.2 Je dána nějaká plocha. Tážeme se, která je na ní nejkratší spojnice daných bodů. Takové křivky se nazývají *geodetiky* nebo *geodetické čáry*.

1.3 Viz obr. XXVII-1. Chtěli bychom najít křivku, po které by se pouhým působením tíže skutálela kulička z bodu A do bodu B za co nejkratší dobu. Rovná nakloněná plocha na to nevypadá: zdá se, že by na začátku měla kulička raději získat větší rychlost. Budeme-li ale na začátku klesat příliš prudce, bude zbytek cesty příliš povlovný. Jaká cesta je nejvýhodnější? Tato otázka se nazývá úloha o *brachystochroně*.

1.4 Ve všech případech šlo o úlohy na extrém velmi připomínající úlohy na extrém funkcí jedné nebo více reálných proměnných (v případě 1.1 je nápadná analogie s úlohou z XIV.4). V této kapitole ukážeme, že je možno řešit úlohy právě předvedeného typu na podobném principu.

Máme nějaké zobrazení $\mathcal{F}$ prostoru křivek (funkcí, apod.) do množiny reálných čísel. Takovému zobrazení se obvykle říká *funkcionál*. V prostoru takových křivek (funkcí, apod.) je metrika, abychom mohli dát smysl pojmu *„býti blízko“*. Řekneme, že $\mathcal{F}$ má v křivce (funkci, apod.) φ_0 lokální extrém, je-li pro všechny φ dost blízko k φ_0 splněna nerovnost $\mathcal{F}(\varphi) \geq \mathcal{F}(\varphi_0)$ resp. $\mathcal{F}(\varphi) \leq \mathcal{F}(\varphi_0)$.

V.2 Eulerova rovnice

2.1 Budeme zkoumat extrémy funkcinálu

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx$$

kde $F(x, y, z)$ je funkce tří proměnných mající spojité parciální derivace. Prostor, na němž $\mathcal{F}$ vyšetřujeme je množina hladkých funkcí na $\langle a, b\rangle$ s metrikou danou normou

$$\|\varphi\| = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |\varphi(x)| + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |\varphi'(x)| .$$

2.2

LEMMA: *Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$$

pro všechny hladké funkce h takové, že $h(a) = h(b) = 0$. Potom $f \equiv 0$.

Důkaz: Nechť f není nulová. Tedy je, dejme tomu, $f(x_0) > 0$ pro nějaké $x_0 \in (a, b)$. Zvolme $\epsilon > 0$ tak, aby $f(x) > 0$ na intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ a funkci h kladnou na nějakém neprázdném intervalu $\subseteq J$ a nulovou jinde (viz obr XXVII-2). Potom je $\int_a^b f(x)h(x) > 0$.
□

2.3

VĚTA: (Eulerova rovnice) *: Nechť $\mathcal{F}$ nabývá extrému v nějaké funkci φ. Potom tato funkce splňuje diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

(kde za y dosazujeme $\varphi(x)$ a za z pak $\varphi'(x)$).

Poznámka: *Eulerova rovnice se často symbolicky formuluje tak, že „funkce $y = y(x)$ splňuje rovnici*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right).$$

“

Důkaz: Zvolme hladkou h takovou, že $h(a) = h(b) = 0$. Zkoumejme reálnou funkci

$$\Phi_h(t) = \int_a^b F(x, \varphi(x) + th(x), \varphi'(x) + th'(x))dx.$$

Měl-li funkcionál $\mathcal{F}$ ve φ extrém, má Φ_h extrém v bodě 0 a tedy, má-li tam derivaci, je $\Phi'_h(0) = 0$. Spočítáme-li:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{t}\left(\Phi_h(t) - \Phi_h(0)\right) = \\ \tfrac{1}{t}\int_a^b (F(x, \varphi(x) + th(x), \varphi'(x) + th'(x)) - (F(x, \varphi(x), \varphi'(x))dx = \\ \tfrac{1}{t}\left(\int_a^b \tfrac{\partial F(x, \varphi(x) + \vartheta th(x), \vartheta\varphi'(x) + th'(x))}{\partial y} th(x) + \int_a^b \tfrac{\partial F(\cdots)}{\partial z} th'(x)dx\right).\end{gathered}$$

Jelikož je $h(a) = h(b) = 0$ dostaneme, použijeme-li v druhém integrálu integrace per partes,

$$\cdots = \int_a^b \left(\frac{\partial F(\cdots)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(\cdots)}{\partial z}\right)\right) h(x)dx,$$

což má pro $t \to 0$ limitu

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{\partial z}\right)\right) h(x)dx.$$

Nyní použijte Lemmatu 2.2.
□

2.4 Proceduru z důkazu je možno podstatně přiblížit představám o totálním diferenciálu. Obdobným postupem získáme formuli

$$\mathcal{F}(\varphi + h) - \mathcal{F}(\varphi) = \int_a^b D_\varphi(x) \cdot h(x)dx + \mathcal{M}(h) \cdot \|h\|,$$

kde $\mathcal{M}$ je funkcionál mající pro $h \to 0$ limitu 0 (uvědomte si, že $\int f(x)h(x)dx$ je něco jako skalární součin a srovnejte s XIII.2). V případech kdy to jde mluvíme o $D_\varphi(x)$ jako o *Fréchetově derivaci* funkcionálu $\mathcal{F}$ v bodě φ a v lokálních extrémech musí být nulová. Malé funkce h se někdy nazívají *variace* (odtud název „variační počet“). V našem konkrétním případě jsme uměli Fráchetovu derivaci spočítat: Zjistili jsme, že je

$$D_\varphi(x) = \frac{\partial F(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{\partial z}\right).$$

V.3 Zjednodušení Eulerovy rovnice

3.1 Nezávisí-li funkce F na y je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ a Eulerova rovnice se zjednoduší na

$$\frac{\partial F(x, \varphi(x), \varphi'(x))}{\partial y'} = K.$$

Příklad: Ujistíme se, že nejkratší spojnice bodů v rovině jsou úsečky.

Pro délku grafu funkce φ máme formuli

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}dx.$$

tedy je $F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{a + z^2}}$$

a dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = K,$$

po úpravě

$$\varphi'^2 = K^2(1+\varphi'^2),\ \text{dále}\ (1-K^2)\varphi'^2 = K^2,$$

Tedy

$$\varphi' = \text{ konst a konečně } \varphi(x) = ax + b.$$

3.2 Nechť funkce F nezávisí na x. Potom máme

$$\frac{d}{dx}(F(\varphi(x), \varphi'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\varphi' + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\varphi''$$

a podle Eulerovy rovnice dále

$$\cdots = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot\varphi' + \frac{\partial F}{\partial z}\varphi'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\varphi'\right).$$

Tedy je $\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial z}\varphi'\right) = 0$ a dostáváme rovnici (v obvyklé symbolice)

$$F - y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = K.$$

3.3

PŘÍKLAD: *Úloha o brachystochromě.* Vraťme se k obrázku XXVII-1. Připomeňte si středoškolskou fysiku. Potenciální energie na začátku je mga, kinetická energie kdekoliv je $\frac{1}{2}mv^2$, takže podle zákona zachování energie platí pro rychlost nad souřadnicí x

$$\begin{array}{l} mga + \frac{1}{2}mv(x)^2 + mgy(x), \\ \frac{1}{2}mv(x)^2 = mg(a - y(x)) \\ \text{a konečně } v(x) = \sqrt{2g(a-y(x))}. \end{array}$$

Na druhé straně je tato rychlost derivace délky probíhající dráhy podle času. Označíme-li T čas spotřebovaný do dosažení souřadnice x a chápeme-li s jako funkci x, máme

$$v(x) = \frac{s'(x)}{T'(x)}\text{a tedy}T'(x) = \frac{s'(x)}{v(x)} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(a-y)}}$$

a konečně

$$T(G) = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(a-y)}}.$$

Celkový potřebný čas je tedy dán funkcionálem typu spadajícího pod 3.2. Rovnice z konce tohoto odstavce v našem případě dá

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(a-y)}} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g(a-y)}} = K$$

a po úpravách dále

$$\begin{array}{rl} \sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} & = K\sqrt{2g(a-y)}, \\ 1 & = K\sqrt{2g(a-y)}\cdot\sqrt{a+y'^2}, \\ \frac{1}{a+y'^2} & = 2gK^2(a-y). \end{array}$$

O křivce řešící tuto poslední rovnici, tzv cykloidě si uděláme představu z parametrického vyjádření

$$x(t) = A(\sin t + t) + B, y(t) = a - A(1+\cos t),$$

kde A, B jsou vhodné konstanty.

V.4 Úloha o vázaném extrému

4.1 Vůbec první úloha o které jsme se v této kapitole zmínili je trochu složitější než to, co jsme zatím probírali. Jsou tam funkcionály dva a chceme najít extrém jednoho z nich mezi funkcemi či křivkami, při kterých je druhý konstantní.

4.2 Pro funkcionály typu $\mathcal{F}(\varphi) = \int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi'(x))dx, \mathcal{G}(\varphi) = \int_a^b G(x,\varphi(x),\varphi'(x))dx$ platí

VĚTA: *Má-li $\mathcal{F}$ ve funkci φ extrém mezi funkcemi splňujícími rovnici $\mathcal{G}(\varphi) = K$, existuje číslo λ takové, že φ splňuje Eulerovu rovnici pro $F + \lambda G$.*

POZNÁMKA: *Srovnejte s větou o vázaných extrémech z XIV.4!*

Náznak důkazu: Připomeňte si poznámku 2.4. Označme $\int_a^b f(x)g(x) = \langle f, g\rangle$ („skalární součin") a vezměme Fréchetovy derivace $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$ v extrémní funkci φ (v našem případě je $\mathcal{F}' = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z}$ a podobně pro $\mathcal{G}'$). Tedy („n.m." znamená „něco malého ve srovnání s $\|h\|$")

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi + h) - \mathcal{F}(\varphi) &= \langle \mathcal{F}', h\rangle + \text{n.m.},\\ \mathcal{G}(\varphi + h) - \mathcal{G}(\varphi) &= \langle \mathcal{G}', h\rangle + \text{n.m.} \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ není konstantní (jinak by vazba nic neznamenala). Potom existuje funkce δ taková, že $\langle \mathcal{G}', \delta\rangle \neq 0$. Pomocí této funkce budeme upravovat změnu h tak, aby

$$\mathcal{G}(\varphi + h + t_h \cdot \delta)$$

zůstávalo konstantní. To dává podmínku

$$\begin{gathered} 0 = \mathcal{G}(\varphi + h + t_h \cdot \delta) - \mathcal{G}(\varphi) = \langle \mathcal{G}', h + t_h \cdot \delta\rangle + \text{n.m.} = \\ \langle \mathcal{G}', h\rangle + t_h \cdot \langle \mathcal{G}', \delta\rangle + \text{n.m.}, \end{gathered}$$

takže musíme volit

$$t_h \text{ přibližně } -\frac{\langle \mathcal{G}', h\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle}.$$

Po dosazení do výrazu pro $\mathcal{F}$ dostaneme

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(\varphi + h + t_h\delta) - \mathcal{F}(\varphi) = \langle \mathcal{F}', h + t_h \cdot \delta\rangle + \text{n.m.} = \\ \langle \mathcal{F}', h\rangle - \left\langle \mathcal{F}', \tfrac{\langle \mathcal{G}', h\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle} \cdot \delta \right\rangle + \text{n.m.} = \\ \langle \mathcal{F}', h\rangle - \tfrac{\langle \mathcal{G}', h\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle} \cdot \langle \mathcal{F}', \delta\rangle + \text{n.m.} = \\ \langle \mathcal{F}', h\rangle - \tfrac{\langle \mathcal{F}', \delta\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle} \cdot \langle \mathcal{G}', h\rangle + \text{n.m.} = \\ \left\langle \mathcal{F}' - \tfrac{\langle \mathcal{F}', \delta\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle} \cdot \mathcal{G}', h \right\rangle + \text{n.m.} \end{gathered}$$

Aby tedy výraz nešel pro malé h do kladných i záporných hodnot musí být

$$\mathcal{F}' + \lambda \mathcal{G}' = 0,$$

kde λ je, přibližně, $-\frac{\langle \mathcal{F}', \delta\rangle}{\langle \mathcal{G}', \delta\rangle}$.

Samozřejmě při skutečném pečlivém provedení důkazu bychom se ještě zapotili.

4.3

PŘÍKLAD: Na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ hledejme funkce takové, že délka grafu je co nejmenší při pevném obsahu obrazce pod ní. Tedy podle 4.2 a 3.2 (máme $\mathcal{F}(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2}, \mathcal{G}(y) = \int_{-1}^1 y$) má být

$$\sqrt{1 + y'^2} + \lambda y - y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = K.$$

Po vynásobení $\sqrt{1 + y'^2}$ dostáváme

$$1 + \lambda y \sqrt{1 + y'^2} = K\sqrt{1 + y'^2}$$

a tedy

$$\begin{aligned} 1 &= (K - \lambda y)\sqrt{1 + y'^2},\\ 1 &= (K - \lambda y)^2(1 + y'^2),\\ y'^2 &= \tfrac{1}{(K - \lambda y)^2} - 1, \end{aligned}$$

kteroužto rovnici řeší úseky kružnic, procházející body $(-1, 0), (1, 0)$.

VI Základní fakta o Hilbertových prostorech

VI.1 Banachovy a Hilbertovy prostory

1.1 V této kapitole budeme pracovat s vektorovými prostory nad tělesem $\mathbb{C}$ komplexních čísel. Podstatný rozdíl proti dosavadnímu je v definici skalárního součinu. U toho budeme požadovat tyto vlastnosti ($\overline{\alpha}$ je opět číslo komplexně sdružené k α)

(1) $x \cdot x$ je vždy reálné nezáporné a $x \cdot x = 0$ jen pro $x = \mathrm{o}$,

(2) $xy = \overline{yx}$

(3) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\overline{\lambda}y)$,

(4) $x(y + z) = xy + xz$.

Následující větu budeme muset dokázat znovu; v důkazu v VII.5 bylo podstatné, že šlo o reálná čísla.

VĚTA: *(Cauchy-Schvarzova nerovnost) :*

$$|xy| \leq \sqrt{x \cdot x} \cdot \sqrt{y \cdot y}$$

Důkaz: Nyní je

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y)(x + \lambda y) = xx + (\lambda y)x + x(\lambda y) + (\lambda y)(\lambda y) = \\ &= x \cdot x + \lambda(yx) + \overline{\lambda}(xy) + \lambda\overline{\lambda}(yy). \end{aligned}$$

Je-li $x = \mathrm{o}$ je nerovnost zřejmě splněna. Nechť $yy \neq 0$. Položme $\lambda = -\frac{xy}{yy}$. Dostáváme

$$0 \leq x \cdot x - \frac{xy}{yy}yx - \frac{yx}{yy}xy + \frac{(xy)(yx)}{(yy)(yy)} \cdot (yy) = xx - \frac{xy}{yy}yx$$

a tedy $xy \cdot yx \leq (x \cdot x) \cdot (y \cdot y)$. Odmocněte.
□

1.2 *Normou* na vektorovém prostoru V (reálném nebo komplexním) rozumíme zobrazení $(x \to \|x\|)$: $V \to \mathbb{R}$ splňující tyto požadavky:

(1) $\|x\| > 0$ a $\|x\| = 0$ jen pro $x = \mathrm{o}$,

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

1.3 Příklady: Cokoliv z následujícího je norma na V_n:

(a) $\|\vec{x}\| = \max |x_j|$

(b) $\|\vec{x}\| = \sum |x_j|$

(c) $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum x_j^2}$

Na prostoru omezených reálných funkcí na nějaké množině X je normou třeba

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| \,|\, x \in X\}.$$

1.4 Zvlášť důležitý příklad: Na vektorovém prostoru se skalárním součinem položme

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Toto přiřazení je norma.

Důkaz: Že splňuje požadavek (1) vidíme bezprostředně. Podle Cauchy-Schwarzovy nerovnosti máme

$$\begin{gathered}\|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = \\ |xx+xy+yx+yy| \le \|x\|^2 + |xy| + |yx| + \|y\|^2 \le \\ \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.\end{gathered}$$

Konečně $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x)(\alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(xx)} = |\alpha|\cdot\|x\|$.

□

1.5 *Normovaný lineární prostor* je vektorový prostor opatřený normou. Jelikož

$$\|x-z\| = \|x-y+y-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\|,$$

je $\rho(x,y) = \|x-y\|$ metrika na V a v tomto smyslu budeme na normovaný lineární prostor vždy nahlížet jako na metrický prostor. Je-li *úplný*, hovoříme o *Banachově prostoru*, jestliže přitom norma vznikla ze skalárního součinu, hovoříme o *Hilbertově prostoru.*

POZNÁMKA: *Uvědomte si, že většina metrik, se kterými jste se zatím setkali, zejména všechny metriky používané na euklidovských prostorech, vznikly z norem, a že $\mathbb{E}_n$ opatřený obvyklou pythágorovskou vzdáleností je příkladem Hilbertova prostoru.*

1.6

VĚTA: *Norma je spojité zobrazení příslušného normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$.*

Důkaz: Máme $\|x\| = \|y+(x-y)\| \le \|y\| + \|x-y\|$ a podobně v opačném pořadí, takže $|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|$.

□

1.7 Důležitá úmluva: Za podprostory Banachova resp. Hilbertova prostoru považujeme ty podmnožiny, které jsou ve zděděné struktuře opět Banachovy resp. Hilbertovy prostory. Zejména musí být opět úplné. Připomeňme si XII.6. Vidíme, že *podprostory Banachova resp Hilbertova prostoru jsou jeho uzavřené lineární podprostory (podmoduly).*

VI.2 Stejnoměrně konvexní Banachův prostor

2.1 Řekneme, že normovaný lineární prostor je *stejnoměrně konvexní* jestliže

$$\begin{gathered}\forall\epsilon>0\exists\delta>0 \text{ takové, že } \forall x,y \text{ platí implikace} \\ \|x\|=\|y\|=1\& \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta \Rightarrow \|x-y\|<\epsilon.\end{gathered}$$

Vysvětlení: Tato podmínka vyjadřuje, zhruba řečeno, to, že koule $\{x|\,\|x\|\le r\}$ jsou skutečně vypuklé v názorném slova smyslu. Na obr. XXVIII-1(a) máme jednotkovou kouli v $\mathbb{E}_2$ s normou $\|\vec{x}\| = \max(|x_1|,|x_2|)$. Body x a y na okraji mohou být od sebe daleko a bod ve středu mezi nimi je stále na okraji. Tento prostor tedy stejnoměrně konvexní není. V příkladu na obr. XXVIII-1(b) kde $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, vzdalují-li se body x a y od sebe, vzdaluje se jejich střed od okraje.

2.2

VĚTA: *Hilbertův prostor je stejnoměrně konvexní.*

Důkaz: Vezměme $\epsilon>0$ a položme $\delta = 1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}$. Je-li $\|x\|=\|y\|=1$ a $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta = \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{4}}$, máme

$$1-\frac{\epsilon^2}{4} < \frac{1}{4}(x+y)(x+y) = \frac{1}{4}(1+xy+yx+1) = \frac{1}{4}(2+yx+xy)$$

a odtud

$$xy+yx > 2-\epsilon^2,$$

takže

$$\|x-y\|^2 = (x-y)(x-y) = \|x\|^2 + |y\|^2 - xy - yx = 2-(xy+yx) < \epsilon^2.$$

□

2.3

LEMMA: *Nechť ve stejnoměrně konvexním Banachově prostoru* $\lim \|y_n\| = \lim \|z_n\| = \lim \left\| \frac{y_n+z_n}{2} \right\| = 1$. *Potom* $\lim \|y_n - z_n\| = 0$.

Důkaz: Především zřejmě máme

$$\lim \left\| \frac{z_n}{\|z_n\|} - \frac{z_n}{\|y_n\|} \right\| = \lim \frac{1}{\|z_n\|} \cdot \left\| \left(1 - \frac{\|z_n\|}{\|y_n\|}\right) \cdot z_n \right\| = 0. \tag{1}$$

Jelikož je norma spojitá funkce, máme podle (1) a předpokladu

$$\lim \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{y_n}{\|y_n\|} + \frac{z_n}{\|y_n\|} \right) \right\| = \lim \frac{1}{\|y_n\|} \left\| \frac{y_n + z_n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z_n}{\|z_n\|} + \frac{z_n}{\|y_n\|} \right) \right\| = 0$$

a tedy podle stejnoměrné konvexnosti musí být

$$\lim \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|} + \frac{z_n}{\|z_n\|} \right\| = 0.$$

Tedy (užijeme znovu (1))

$$\lim \|y_n - z_n\| = \lim \|y_n\| \cdot \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|} - \frac{z_n}{\|z_n\|} + \frac{z_n}{\|z_n\|} - \frac{z_n}{\|y_n\|} \right\| = 0.$$

□

2.4

VĚTA: *Buď* K *uzavřená konvexní podmnožina stejnoměrně konvexního Banachova prostoru* B*, buď* $a \in B$*. Potom existuje právě jeden bod* $y \in K$ *takový, že*

$$\|y - a\| = \inf\{\|x - a\| \,|x \in K\}.$$

Důkaz: Zobrazení $x \to x - a, x \to \alpha x$ jsou homeomorfismy zachovávající konvexnost. Tedy, odmyslíme-li si triviální případ $a \in K$, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že

$$a = \mathrm{o} \text{ a } \inf\{\|x\| \,|x \in K\} = 1.$$

V K tedy existuje posloupnost $\|x_n\|$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1.$$

Jelikož je K konvexní, máme

$$1 \le \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \le \frac{1}{2} \left(\|x_n\| + \|x_m\|\right). \tag{$*$}$$

Předpokládejme, že $(x_n)_n$ není Cauchyovská. Potom z ní můžeme vybrat podposloupnosti $(y_n)_n, (z_n)_n$ takové, že pro nějaké $\epsilon_0 > 0$ je stále

$$\|y_n - z_n\| \ge \epsilon_0.$$

Máme však $\lim \|y_n\| = \lim \|z_n\| = 1$ a podle (*) též $\lim \left\| \frac{y_n - z_n}{2} \right\| = 1$ takže by podle lemmatu 2.3 mělo být $\lim \|y_n - z_n\|$. Tedy $(x_n)_n$ Cauchyovská je, a pro její limitu, která je ovšem v K, platí $\|y\| = 1$. Kdyby ještě $\|z\| = 1, z \in K$, měli bychom podle předchozí úvahy cauchyovskou posloupnost $y, z, y, z, y, z, \ldots$, což je možné jen když $y = z$.
□

VI.3 Orthogonální doplňky v Hilbertově prostoru

3.1 Pro podprostor M Hilbertova prostoru H definujeme jako v VII.5

$$M^{\perp} = \{x | xy = 0 \text{ pro všechna } y \in M\}.$$

Zřejmě je $M^{\perp}$ opět podprostor: Linearita je bez problémů, uzavřenost plyne z toho, že $(x, y) \to x \cdot y$ je spojité zobrazení; je totiž

$$|xy - x'y'| \leq |xy - xy' + xy' - x'y'| \leq |xy - xy'| + |xy' - x'y'| \leq \|x\| \cdot \|y - y'\| + \|y'\| \cdot \|x - x'\|.$$

3.2

VĚTA: *Buď M podprostor Hilbertova prostoru H. Potom je každý bod $x \in H$ možno napsat právě jedním způsobem ve tvaru*

$$x = y + z, \text{ kde } y \in M \text{ a } z \in M^{\perp}.$$

Důkaz: Buď y ten bod v M, pro který (viz 2.4)

$$\|x - y\| = \min\{\|x - u\| \, | u \in M\}$$

a položme $z = x - y$. Pro obecné nenulové $u \in M$ je

$$\left\| z - \frac{zu}{uu} u \right\| = \left\| x - y - \frac{zu}{uu} u \right\| \geq \|x - y\| = \|z\|$$

a tedy

$$\begin{gathered} \|z\|^2 - \tfrac{\overline{zu}}{uu} zu - \tfrac{zu}{uu} uz + \tfrac{zu}{uu} \cdot \tfrac{\overline{zu}}{uu} uu \geq 0, \\ -|zu|^2 = -(\overline{zu})(zu) \geq 0, \end{gathered}$$

a konečně $zu = 0$. Tedy $z \in M^{\perp}$.

Máme-li $x = y + z = y' + z'$ s dalšími $y' \in M, z' \in M^{\perp}$, je $y - y' = z' - z$ a tedy jsou tyto rozdíly v $M \bigcap M^{\perp} = \{\mathrm{o}\}$. Odtud jednoznačnost.
□

3.3

VĚTA: $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.

Důkaz: Zřejmě je $M \subseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Buď naopak $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$; napišme ho podle 3.2 jako $x = y + z, y \in M, z \in M^{\perp}$. Potom

$$zz = zx - zy = 0 - 0 = 0$$

a tedy $z = \mathrm{o}$ a $x = y \in M$.
□

3.4 Jelikož zřejmě $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$, je podle 3.3 zobrazení $(M \to M^{\perp})$ antiisomorfismus množiny podprostorů uspořádané inklusí na sebe. Odtud dostáváme

$$\left(M \bigcap N\right)^{\perp} = M^{\perp} \otimes N^{\perp}, (M \otimes N)^{\perp} = M^{\perp} \bigcap N^{\perp},$$

kde $M \otimes N$ je nejmenší podprostor obsahující M i N.

VI.4 Spojité lineární formy na Hilbertově prostoru

4.1

VĚTA: *Buď H Hilbertův prostor. Potom je pro každé $a \in H$ zobrazení $(x \to x \cdot a) : H \to \mathbb{C}$ lineární a spojité, a naopak každé spojité lineární zobrazení $H \to \mathbb{C}$ je dáno předpisem $(x \to x \cdot a)$ pro nějaké $a \in H$.*

Důkaz: První tvrzení je zřejmé. Buď nyní $\varphi : H \to \mathbb{C}$ spojitě lineární. Je-li konstantní (a potom ovšem nulová), můžeme volit $a = \mathrm{o}$. Jinak položme

$$M = \{x | \varphi(x) = 0\}.$$

tento podprostor není celé H a tedy $M^\perp \neq \{\mathrm{o}\}$ (3.2).

Ukážeme, že $\dim M^\perp = 1$. Skutečně, buďte $x, y \in M^\perp$. Pro $u = \varphi(y) \cdot x - \varphi(x) \cdot y$ máme

$$\varphi(u) = \varphi(y) \cdot \varphi(x) - \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0$$

a tedy je $\varphi(y)x - \varphi(x)y \in M \bigcap M^\perp = \{\mathrm{o}\}$. Tedy jsou x, y lineárně závislé.

Tedy je $M^\perp = \{\alpha b | \alpha \in \mathbb{C}\}$ pro nějaké $b \neq \mathrm{o}$. Podle věty 3.2 je obecné $x \in H$ možno psát ve tvaru

$$x = x_M + \alpha(x) b, x_M \in M.$$

Tedy je

$$\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(b)$$

a

$$x \cdot b = \alpha(x)(b \cdot b).$$

Srovnáním těchto dvou rovnic dostaneme

$$\varphi(x) = xa, \text{ kde } a = \frac{\overline{\varphi(b)}}{b \cdot b}.$$

□

4.2 Tvrzení v tomto bodě nebudeme dokazovat. Slouží jen k tomu, abychom motivovali definici normy v prostoru lineárních forem.

Pro libovolné dva Banachovy prostory B, B' je množina

$$L(B, B')$$

všech spojitých lineárních zobrazení při zřejmém sčítání a násobení komplexními čísly vektorový prostor. Platí věta, že lineární $f : B \to B'$ je spojité právě když existuje číslo K takové, že

$$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K.$$

Nejmenší takové číslo K,

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

má vlastnoti normy a touto normou je $L(B, B')$ Banachův prostor.

Pro spojitou lineární formu $\varphi : H \to \mathbb{C}$ máme tedy definovánu normu

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}.$$

4.3 Pro Hilbertův prostor H označme $\widetilde{H} = L(H, \mathbb{C})$ příslušný prostor lineárních forem. Pro prvek $a \in H$ označme

$$\widetilde{a} = (x \to x \cdot a) \in \widetilde{H}.$$

VĚTA: *Zobrazení $\mathcal{H}_H = (a \to \widetilde{a}) : H \to \widetilde{H}$ je vzájemně jenoznačné, zachovává součet a normu, a pro komplexní násobek platí $\mathcal{H}(\alpha a) = \overline{\alpha}\mathcal{H}(a)$.*

Důkaz: První tvrzení, až na prostotu, je obsaženo v 4.1. Jelikož $(a-b)a = (a-b)b$ implkuje $(a-b)(a-b) = 0$, musí pro $a \neq b$ být hodnoty $\mathcal{H}(a)$ a $\mathcal{H}(b)$ v prvku $a - b$ různé. $\mathcal{H}$ je tedy prosté. Zachování součtu plyne z distributivity skalárního součinu.

Pro $\|x\| \leq 1$ máme

$$\|\mathcal{H}(a)(x)\| = \|xa\| \leq \|x\| \, \|a\| = \|a\|$$

a tedy $\|\mathcal{H}(a)\| \leq \|a\|$. Jelikož ale

$$\left\| \mathcal{H}(a) \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \right\| = \left\| \frac{a \cdot a}{\|a\|} \right\| = \|a\|$$

je $\|\mathcal{H}(a)\| = \|a\|$. Konečně

$$\mathcal{H}(\alpha a)(x) = x\alpha a = \overline{\alpha}(xa) = \overline{\alpha}\left(\mathcal{H}(a)(x)\right) = \left(\overline{\alpha}\mathcal{H}(a)\right)(x).$$

□

4.4 Buď $f : H \to H'$ lineární zobrazení. K němu máme (podobně jako v IX.3) *duální zobrazení*

$$\widetilde{f} : \widetilde{H'} \to \widetilde{H}$$

dané předpisem $\widetilde{f}(\varphi) = \varphi \mathrm{o} f$. Vzhledem k předchozí větě je však se zobrzením f spojeno též lineární zobrazení v původním směru, totiž g z následujícího komutativního diagramu:

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{\mathcal{H}_H}{\longrightarrow} & \widetilde{H} \\ \downarrow f & & \downarrow g \quad = \mathcal{H}_{H'} \mathrm{o} f \mathrm{o} \mathcal{H}_H^{-1}. \\ H' & \overset{\mathcal{H}_{H'}}{\longrightarrow} & H' \end{array}$$

Tuto věc si nyní ujasníme.

Pro lineární zobrazení f a libovolné pevné $y \in H'$ máme zřejmě spojitou lineární formu

$$\varphi = (x \to f(x) \cdot y)\,.$$

Podle 4.1 tedy existuje $z \in H$ takové, že

$$\varphi = (x \to x \cdot z)\,;$$

označíme $z = f^*(y)$ a dostáváme tím jakési zobrazení $H' \to H$ pro které platí, že

$$\text{pro všechna } x, y, f(x) \cdot y = x \cdot f^*(y).$$

Toto zobrazení se nazývá zobrazení *adjungované* k zobrzení f. Ukážeme, že zobrazení g z diagramu nahoře je $\widetilde{f^*}$. Skutečně, máme

$$\widetilde{f^*}\left(\mathcal{H}_H(a)\right)(x) = \left(\mathcal{H}_H(a)\mathrm{o} f^*\right)(x) = \mathcal{H}_H(a)\left(f^*(x)\right) = f^*(x)a = \overline{af^*(x)} = \overline{f(a)x} = xf(a) = \mathcal{H}_H\left(f(a)\right)(x).$$

4.5 Spojité lineární zobrazení $A : H \to H$ se nazývá *Hermitovské* je-li $H = H^*$, to jest, jestliže obecně platí

$$A(x)y = xA(y).$$

Poznámka: *Hermitovské operátory hrají významnou roli v theoretické fysice. Je užitečné cvičení ověřit si, že popisujeme-li v konečné dimensi lineární operátory maticemi (a máme-li na mysli - jsme-li v komplexním případě - skalární součin $(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = \sum x_i \overline{y_i}$), je podmínka nahoře vyjádřená formulí*

$$A = \overline{A}^{\top}$$

($\overline{A}$ znamená komplexně sdruženou matici, $\overline{(a_{ij})} = (\overline{a_{ij}})$; v reálném případě jde tedy prostě o symetrické matice).

Věta: *1. Všechna vlastní čísla Hermitovkého operátoru jsou reálná.*

2. Vlastní vektory příslušející k různým vlastním číslům Hermitovského operátoru jsou na sebe kolmé.

Důkaz: 1. Buď $A(u) = \alpha u, u \neq \mathrm{o}$. Potom je $\alpha(u \cdot u) = \alpha u \cdot u = A(u) \cdot u = u \cdot A(u) = u(\alpha u) = \overline{\alpha}(u \cdot u)$.

2. Buď $A(u) = \alpha u, A(v) = \beta v, \alpha \neq \beta$. Potom je $(\alpha - \beta)uv = \alpha(uv) - \beta(uv) = (\alpha u)v - u(\beta v) = A(u)v - uA(v) = 0$.

□

VI.5 Nekonečné sčítání v Hilbertově prostoru

5.1 Řekneme, že systém $(x_i)_{i\in J}$ prvků Hilbertova prostoru má součet x a píšeme

$$x = \sum_J x_i,$$

jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje konečná $J(\epsilon) \subseteq J$ taková, že pro každou konečnou K takovou, že $J(\epsilon) \subseteq K \subseteq J$ platí $\|x - \sum_K x_i\| < \epsilon$.

POZOROVÁNÍ: *Pokud součet existuje, je jednoznačně určen. (Skutečně, nechť tvrzení platí pro x i pro y. Potom*

$$\|x-y\| \leq \left\|x - \sum_{J(\epsilon)} x_i\right\| + \left\|y - \sum_{J(\epsilon)} x_i\right\| < 2\epsilon.)$$

5.2

VĚTA: *$(x_i)_J$ má součet právě když ke každému $\epsilon > 0$ existuje konečná $K(\epsilon) \subseteq J$ taková, že kdykoli je $K \subseteq J$ konečná a $K \bigcap K(\epsilon) = \emptyset$, je $\|\sum_K x_i\| < \epsilon$.*

Důkaz: $(\Rightarrow)$: Vezměme $\epsilon > 0$ a položme $K(\epsilon) = J\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Nechť K je konečná a $K \bigcap K(\epsilon) = \emptyset$. Potom je

$$\left\|\sum_K x_i\right\| = \left\|\sum_{K\bigcup K(\epsilon)} x_i - \sum_{K(\epsilon)} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{K\bigcup K(\epsilon)} x_i - x\right\| + \left\|\sum_{K(\epsilon)} x_i - x\right\| < \epsilon.$$

$(\Leftarrow)$: Označme $K_n = K(1) \bigcup \cdots \bigcup K\left(\frac{1}{n}\right)$ a položme $y_n = \sum_{j\in K_n} x_j$. Podle předpokladu je zřejmě $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ cauchyovská posloupnost. Označme $x = \lim y_n$. Ukážeme, že $x = \sum_J x_i$.

Zvolme $\epsilon > 0$ a k němu n takové, aby $\|x - y_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ a aby zároveň bylo $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Nechť $K \supseteq K_n$. Položme $L = K \setminus K_n$. Potom je

$$\left\|x - \sum_K x_i\right\| = \left\|x - y_n + \sum_K x_i\right\| \leq \|x - y_n\| + \left\|\sum_L x_i\right\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

5.3

VĚTA: *Systém $(x_i)_J$ má součet x právě když*

(1) pro nejvýš spočetně mnoho prvků je $x_i \neq o$, a

(2) pro libovolné seřazení $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ těchto nenulových prvků je $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k = x$.

Důkaz: Označení jako v předchozím.

$(\Rightarrow)$: Množina $\bigcup_{n=1}^\infty K\left(\frac{1}{n}\right)$ je spočetná a není-li j v této množině, je $\|x_j\| < \frac{1}{n}$ pro všechna n, takže $x_j = \text{o}$.

Pro $\epsilon > 0$ zvolme n_ϵ tak, zby již bylo $J(\epsilon) \subseteq \{1, 2, \ldots, n_\epsilon\}$. Potom je pro $n \leq n_\epsilon$ zřejmě

$$\left\|x - \sum_{k=1}^n x_k\right\| < \epsilon.$$

$(\Leftarrow)$: Vezměme především nějaké pevné uspořádání $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ a položme $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k$. Kdyby nebylo $x = \sum_J x_j$ ve smyslu definice 5.1, existovalo by $\epsilon_0 > 0$ takové, že pro každé n bychom měli $L(n) \supseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že

$$\left\|\sum_{L(n)} x_j - x\right\| \geq \epsilon_0.$$

Seřadmě nyní naší posloupnost novým způsobem: Položmě $y_1 = x_1$, potom vezměme $y_1, \ldots, y_{n_1}$ všechny x_j s indexy z $L(1)$ a $y_{n_1+1}, \ldots, y_{m_1}$ pak všechna ostatní x_j s indexy do $\max L(1)$. Nyní vezměme $L(m_1)$

a pokračujme všemi $y_{m_1+1},\dots,y_{n_2}$ s indexy z této množiny, které se ještě neobjevily. Opět doplníme $y_{n_2+1},\dots,y_{m_2}$ až do indexu j v x_j rovného $\max L(m_1)$, doplníme zbývajícími prvky x_j s indexy z $L(m_2)$ a tak dále. Existuje-li $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n y_j$, rozhodně to není x, protože se mezi částečnými součty $\sum^n y_j$ znovu a znovu oběvují výsledky vzdálené od x o více než ϵ_0.
□

5.4

VĚTA: *Nechť $(x_j)_J, (y_j)_J$ mají součty v Hilbertově prostoru H. Potom*

$$\begin{array}{lll} (1) & \sum_J \alpha x_j & = \alpha \sum_J x_j, \\ (2) & \sum_J (x_j + y_j) & = \sum_J x_j + \sum_J y_j, \\ (3) & \sum_J (x_j \cdot z) & = (\sum_J x_j)\, z. \end{array}$$

mají-li pravé strany smysl.

Důkaz: (1) a (2) jsou zcela bezprostřední. Pro (3) si představme, vzhledem k 5.3, x_j již jako spočetnou posloupnost a uvědomme si, že zobrazení $(y \to y \cdot z)$ je spojité. Tedy je $x \cdot z = (\lim_n \sum^n x_k) \cdot z = \lim_n \sum^n x_k z = \sum^\infty x_n z$.
□

5.5 Podobně jako v VII.5 budeme o systému $(x_j)_J$ hovořit jako o *orthogonálním*, jeli $x_j \cdot x_k = 0$ pro $j \neq k$, a jako o *orthonormálním*, je-li navíc $\|x_j\| = 1$ pro každé j.

5.6

VĚTA: *(Zobecněná Pythagorova věta) : Orthogonální systém $(x_j)_J$ v Hilbertově prostoru má součet právě když $(\|x_j\|^2)_{j\in J}$ má součet v $\mathbb{R}$. Je-li tomu tak, platí*

$$\left\|\sum_J x_j\right\|^2 = \sum_J \|x_j\|^2 .$$

Důkaz: $(\Rightarrow)$: Vezměme $K(\epsilon)$ z 5.2. Pro $K \bigcap K(\epsilon) = \emptyset$ máme

$$\sum_K \|x_j\|^2 = \sum_{j,k\in K} x_j \cdot x_k = \sum x_j \cdot \sum x_j = \left\|\sum_J x_j\right\|^2 < \epsilon^2.$$

$(\Leftarrow)$: V úvaze z první části postupujte pozpátku s tím, že užijete $K(\epsilon^2)$.
Rovnost: Buď $x = \sum_J x_j$. Podle 5.4.(3) máme

$$x \cdot x = \left(\sum_J x_j\right) x = \sum_J x_j x = \sum_J x_j \left(\sum_J x_k\right) = \sum_j \sum_j (x_j \cdot x_k) = \sum_J x_j x_j .$$

□

VI.6 Base Hilbertova prostoru

6.1

VĚTA: *(Besselova nerovnost) : Buď $(x_j)_{j\in J}$ orthonormální systém v Hilbertově prostoru H. Potom pro každý prvek $x \in H$ existuje součet $\sum |x \cdot x_j|^2$ a platí*

$$\sum_J |x \cdot x_j|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Důkaz: Buď $K \subseteq J$ konečná. Máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \textstyle\sum_K (x \cdot x_j) x_j\|^2 = (x - \sum_K (x \cdot x_j) x_j)\,(x - \sum_K (x \cdot x_j) x_j) = \\ &= x \cdot x - \textstyle\sum_K (x \cdot x_j)(x_j \cdot x) - \sum (x_j \cdot x)(x \cdot x_j) - \sum (x \cdot x_j)(x_k \cdot x)(x_j \cdot x_k) = \\ &= x \cdot x - \textstyle\sum_K |x \cdot x_j|^2 \end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_K |x \cdot x_j|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Řada $\sum |x \cdot x_j|^2$ reálných čísel tedy absolutně konverguje.
□

6.2 Z vět 6.1 a 5.6 okamžitě dostáváme

Důsledek: *Je-li $(x_j)_{j \in J}$ orthonormální soustava, existuje pro každý prvek $x \in H$ součet*

$$x = \sum_J (x \cdot x_j) \cdot x_j .$$

6.3

Věta: *(Parsevalova rovnost): Rovnost v Besselově nerovnosti, to jest, $\sum |x \cdot x_j|^2 = \|x\|^2$, nastává právě když*

$$x = \sum_J (x \cdot x_j) \cdot x_j .$$

Důkaz: Máme totiž

$$\left\| x - \sum_J (x \cdot x_j) \cdot x_j \right\|^2 = x \cdot x - \sum |x \cdot x_j|^2$$

(viz začátek důkazu věty 6.1).
□

6.4 *Basí* Hilbertova prostoru rozumíme libovolný maximální orthonormální systém, to jest, orthonormální systém, k němuž již nelze přidat žádný další nenulový prvek kolmý ke všem dosavadním.

Užitím Zornova lemmatu na množinu všech orthonormálních systémů uspořádanou inkluzí snadno dostaneme

Tvrzení: *Každý Hilbertův prostor má basi.*

Důleité upozornění: Pojem base Hilbertova prostoru se podstatně liší od pojmu base vektorového prostoru z kapitoly VII. Nejde ani tak o to, že požadujeme orthonormalitu: liší se to i od pojmu orthonormální base ve vektorovém prostoru se skalárním součinem. Base v právě definovaném smyslu v typickém případě *není* basí příslušného vektorového prostoru z toho důvodu, že se obecný prvek, jak v další větě uvidíte, dá sice pomocí ní vyjádřit „nekonečnými lineárními kombinacemi“; konečnými lineárními kombinacemi se však, kromě případu konečné dimense, většina prvků vyjádřit nedá.

6.5

Věta: *Následující tvrzení o orthonormálním systému $(x_j)_J$ v Hilbertově prostoru H jsou ekvivalentní:*

(1) $(x_j)_J$ je base.

(2) Je-li x kolmý ke všem prvkům x_j, je $x = o$.

(3) Pro každý prvek $x \in H$ platí

$$x = \sum_J (x \cdot x_j) \cdot x_j .$$

(4) Pro každé dva prvky $x, y \in H$ platí

$$x \cdot y = \sum (x \cdot x_j)\overline{(y \cdot x_j)} .$$

(5) Pro každý prvek $x \in H$ platí

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x \cdot x_j|^2}.$$

Důkaz: (1) $\Rightarrow$ (2) : Jinak bychom k $(x_j)_J$ mohli přidat $\frac{x}{\|x\|}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Máme $(x - \sum(x \cdot x_j) \cdot x_j) \cdot x_k = x \cdot x_j - x \cdot x_j = 0$ a tedy podle (2) musí být výraz $x - \sum(x \cdot x_j) \cdot x_j$ nulový.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Máme

$$xy = \sum_j (xx_j)x_j \sum_k (yx_k)x_k = \sum_{j,k} (xx_j)(yx_k)x_j x_k = \sum_j (xx_j)\overline{(yx_j)}.$$

(4) $\Rightarrow$ (5) : Stačí položit $x = y$.

(5) $\Rightarrow$ (1) : Nechť (1) neplatí a máme tedy nějaký prvek x kolmý ke všem x_j a takový, že $\|x\| = 1$. Potom

$$\|x\| = 1 \neq \sqrt{\sum |xx_j|^2} = 0.$$

□

6.6 Vše co bylo v této kapitole prováděno pro komplexní případ platí též pro případ reálný. Důkazy jsou někdy trochu jednodušší.

6.7 S něčím velmi blízkým basi Hilbertova prostoru jsme se již setkali v odstavci o Fourrierových řadách (XVI.7). Kdybychom chtěli výsledek o Fourierových řadách do úplného souladu s fakty z této kapitoly, museli bychom přesněji specifikovat, o který Hilbertův prostor tam vlastně jde.

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ vezměme nejprve systém všech funkcí f takových, že existuje konečný Lebesgueův integrál

$$\int_a^b f^2(x)dx.$$

Na tomto systému zaveďme ekvivalenci

$$f \sim g \text{ právě když } f(x) = g(x) \text{ skoro všude.}$$

Systém tříd ekvivalence je zřejmým způsobem opatřen strukturou vektorového prostoru, a přepisem

$$[f] \cdot [g] = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

na něm můžeme zavést skalární součin (na výběru representantů na pravé straně při tom zřejmě nesejde). Tak dostaneme Hilbertův prostor $\mathcal{L}_2\langle a, b\rangle$ a věta o Fourrierových řadách v podstatě říká to, že v tomto prostoru vhodně znormované třídy funkcí

$$\begin{array}{ll} \cos \frac{2\pi}{b-a}nx, & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \sin \frac{2\pi}{b-a}nx, & n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

tvoří basi ve smyslu definice 6.4. Viz ekvivalenci (1) $\equiv$ (3) ve větě 6.5.