Obsah

XVII Ještě k metrickým prostorům

XVII.1 Užitečná věta o lepení spojitých zobrazení

1.1 VĚTA: *Buďte $X_1, \ldots, X_n$ uzavřené v X, buď $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Platí-li pro zobrazení $f : X \to Y$, že každé $f_j = f|X_j$ je spojité, je i f spojité.*

Důkaz: Buď M uzavřená v Y. Snadno ověříme, že

$$f^{-1}(M) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j^{-1}(M).$$

Jelikož každé f_j je spojité, $f_j^{-1}(M)$ jsou uzavřené v X_j (XII.2.2) a jelikož X_j je uzavřená v X, je i $f_j^{-1}(M)$ uzavřená v X. A sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina. Užijte znovu XII.2.2. $\square$

1.2 POZOROVÁNÍ:

1 *Tvrzení se obvykle užívá v konstrukcích v takovéto podobě: Jsou dána spojitá $f_j : X_j \to Y$, o kterých se zjistí (nebo předem ví), že pro $x \in X_j \cap X_k$ je vždy $f_j(x) = f_k(x)$. Potom se definuje zobrazení f předpisem $f(x) = f_j(x)$ pro $x \in X_j$.*

2 *Oba předpoklady věty (uzavřenost množin X, konečnost rozkladu) jsou podstatné. Rozdělíme-li třeba $\langle 0, 1\rangle$ na $\langle 0, \frac{1}{2}$ a $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$, jistě není pravda, že zobrazení spojité na obou těchto intervalech by bylo spojité i na $\langle 0, 1\rangle$. Na druhé straně, jednobodové množiny jsou uzavřené a každé zobrazení je spojité na každém jednobodovém podprostoru.*

3 *Obdobná věta o otevřených množinách platí bez omezení počtu. Dokažte! Stačí jen projít důkaz věty (1.1) a podívat se, kde jsme konečnost použili.*

XVII.2 Rozšiřování zobrazení (Tietzeovy věty)

2.1 LEMMA: *Buď (X, ρ) metrický prostor, A libovolná podmnožina X. Potom definujeme $f(x) = \rho(x, A)$ spojité zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz: Dokážeme, že dokonce platí

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y).$$

Skutečně zvolme $\varepsilon > 0$ a $a \in A$ tak, aby $\rho(x, a) \leq f(x) + \varepsilon$. Potom

$$f(y) \leq \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < \rho(y, x) + f(x) + \varepsilon.$$

A tedy $f(y) - f(x) < \rho(x, y) + \varepsilon$. Záměnou x a y vidíme, že též $f(x) - f(y) < \rho(x, y) + \varepsilon$ a jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolně malé, dostáváme nerovnost $(*)$. $\square$

2.2 VĚTA: *Buďte A, B uzavřené disjunktní podmnožiny metrického prostoru X, buďte α, β reálná čísla. Potom existuje spojité $\varphi : X \to \mathbb{R}$ takové, že*

$$f[A] \subseteq \{\alpha\},\ f[B] \subseteq \{\beta\} \quad a \quad f[X] \subseteq \langle \min(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)\rangle.$$

Důkaz: Položme

$$\varphi(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}.$$

Jelikož $\rho(x,A)+\rho(x,B) \neq 0$ pro všechna x (kdyby nastala rovnost, bylo by $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$; jenomže A a B jsou uzavřené a disjunktní) je φ podle 2.1 (a II.6.3)) spojité. Že má požadované vlastnosti, se jednoduše ověří. $\square$

2.3 VĚTA: *(Tietzova věta o kompaktním intervalu) Buď J kompaktní interval, X metrický prostor, $A \subseteq X$ uzavřený podprostor. Každé spojité zobrazení $f : A \to J$ se dá rozšířit na X, t.j. existuje k němu spojité $g : X \to J$ takové, že $g|A = f$.*

Důkaz: Je-li J jednobodový, je tvrzení triviální. Ostatní kompaktní intervaly jsou všechny navzájem homeomorfní (proč?) a stačí to tedy dokázat pro jeden z nich: Vezměme homeomorfismus $h : J \to J'$, nechť věta platí pro J' a nechť $f : A \to J$ je spojité. Vezmeme $f' = h \circ f$, rozšíříme je na $g' : X \to J'$ a konečně položíme $g = h^{-1}g'$.

Bude se nám pohodlně pracovat s $J = \langle -1, 1\rangle$. Položme $A_1 = f^{-1}\left(\left\langle -1, -\frac{1}{3}\right\rangle\right)$, $B_1 = f^{-1}\left(\left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle\right)$. Podle XII.2.2 jsou to uzavřené podmnožiny A a jelikož A je uzavřená v X, jsou A_1, B_1 uzavřené i v X. Podle 2.2 zvolme $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ tak, aby

$$\varphi_1[A_1] = -\frac{1}{3},\ \varphi_1[B_1] = +\frac{1}{3} a \forall\, x \in X, |\varphi_1(x)| \leq \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k volbě množin A_1, B_1 navíc zřejmě

$$x \in A \Rightarrow |f(x) - \varphi_1(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

Položme $f_1(x) = f(x) - \varphi_1(x)$.

Nechť jsou nalezena spojitá zobrazení $\varphi_k : X \to \langle -1, 1\rangle$, $k = 1, \dots, n$, a spojitá zobrazení $f = f_0, f_1, \dots, f_{n-1} : A \to \langle -1, 1\rangle$ taková, že

$$(*) \qquad \begin{array}{l} |\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{3^k}, \quad |f_{k-1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{2}{3^k}, \\ f_k(x) \quad = \quad f_{k-1}(x) \quad - \quad \varphi_k(x). \end{array}$$

Položme

$$A_{n+1} = f_n^{-1}\left(\left\langle -\frac{1}{3^n}, -\frac{1}{3^{n+1}}\right\rangle\right),\ B_{n+1} = f_n^{-1}\left(\left\langle \frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right\rangle\right),$$

a podle 2.2 zvolme $\varphi_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ tak, aby

$$\varphi_{n+1}[A_{n+1}] \subseteq \left\{-\frac{1}{3^{n+1}}\right\},\ \varphi_{n+1}[B_{n+1}] \subseteq \left\{\frac{1}{3^{n+1}}\right\},$$

$$\text{a} \quad \forall x \in X, |\varphi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Potom $|f_n(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3^{n+1}}$.

Definujeme $f_{n+1} : A \to \langle -1, 1\rangle$ předpisem $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \varphi_{n+1}(x)$. Tak indukcí dostáváme

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots \quad a \quad f = f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$$

splňující (∗) pro všechna k. Položme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x).$$

Podle XI.3.8 tato řada stejnoměrně konverguje, a tedy je (viz XI.3.3) g spojitá funkce. Jelikož

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{3^k} = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 1,$$

můžeme se na ni dívat jako na zobrazení $g : X \to \langle -1, 1 \rangle$. Pro $x \in A$ máme

$$f(x) = \varphi_1(x) + f_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + f_2(x) = \cdots$$

$$\cdots = \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) + f_n.$$

Jelikož $\lim_n f_n(x) = 0$, máme tedy pro $x \in A$, $f(x) = g(x)$. □

2.4 VĚTA: *(Tietzova věta o reálné přímce) Buď X metrický prostor, A jeho uzavřený podprostor. Každé spojité zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$ se dá rozšířit na X.*

Důkaz: Stejně jako v předchozím důkazu můžeme $\mathbb{R}$ nahradit homeomorfním prostorem. Vezmeme za tím účelem otevřený interval $(-1, 1)$. Spojité zobrazení $f : A \to (-1, 1)$ můžeme na okamžik považovat za zobrazení do $\langle -1, 1 \rangle$ a to se podle předchozí věty dá rozšířit na $\overline{g} : X \to \langle -1, 1 \rangle$. Potíž je v tom, že toto $\overline{g}$ může nabývat hodnot -1 resp. 1, a tedy nemusí být takovým rozšířením, jaké jsme chtěli mít. To nyní spravíme. Položíme $B = \overline{g}^{-1}(\{-1, 1\})$. To je uzavřená množina (viz XII.2.2) a zřejmě je disjunktní s A (na které se $\overline{g}$) shoduje s f. Tedy podle 2.2 existuje $\varphi : X \to \mathbb{R}$ taková, že $\varphi[A] \subseteq \{1\}$, $\varphi[B] \subseteq \{0\}$ a vždy $\varphi(x) \in \langle 0, 1 \rangle$. Položíme

$$g(x) = \overline{g}(x) \cdot \varphi(x).$$

Potom je $|g(x)| \leq 1$, pro $x \in A$ je $g(x) = \overline{g}(x) = f(x)$ a konečně $|g(x)| \neq 1$. Kdyby totiž $|g(x)| = 1$, muselo by být zároveň $|\overline{g}(x)| = 1$ a $\varphi(x) = 1$. Je-li však $|\overline{g}(x)| = 1$, je $\varphi(x) = 0$. □

XVII.3 Separabilita

3.1 Řekněme, že podmnožina M metrického prostoru X je *hustá*, jestliže $\overline{M} = X$. Prostor X se nazývá *separabilní*, obsahuje-li (nejvýše) spočetnou hustou podmnožinu.

Příklady:

1 $\mathbb{R}$ je separabilní: množina racionálních čísel je v něm hustá.

2 Obecněji, $\mathbb{E}_n$ je separabilní: uvažte množinu všech $(x_1, \ldots, x_n)$, kde x_j jsou racionální.

3 Buď X nespočetná množina, definujeme $\rho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$. Potom (X, ρ) není separabilní.

3.2 Z definice uzávěru snadno dostáváme

POZOROVÁNÍ: *M je hustá v X právě když pro každou neprázdnou otevřenou množinu U platí $U \cap M \neq \emptyset$.*

3.3 Ještě trochu terminologie:

1 Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru $X senazývájehobází$, jestliže se každá otevřená podmnožina $U \subseteq X$ dá napsat jako sjednocení některých prvků $\mathcal{B}$. (PŘÍKLAD: Soustava všech $\Omega(x, \varepsilon)$, nebo již všech $\Omega(x, \frac{1}{n})$ je báze. Zamyslete se nad tím, proč.)

2 Soustava $\mathcal{U}$ (otevřených) množin prostoru X se nazývá *(otevřené) pokrytí*, jestliže $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{U}\} = X$. Je-li $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ také pokrytí, hovoříme o něm jako o *podpokrytí* pokrytí $\mathcal{U}$, nebo o *pokrytí vybraném* z $\mathcal{U}$.

3.4 VĚTA: *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je separabilní

(ii) X má spočetnou bázi.

(iii) Z každého pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí (t.z.v. Lindelöfova vlastnost).

Důkaz: $(i) \Rightarrow (ii)$: Buď M spočetná hustá podmnožina X. Položme $\mathcal{B} = \{\Omega(x, r) \mid x \in M, r \text{racionální}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je báze. K tomu stačí ukázat, že *ke každé otevřené U a každému $x \in U$ existuje $V = V(x, U) \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in V \subseteq U$.* (Potom je totiž $U = \bigcup\{V(x, U) \mid x \in U\}$.) Buď U otevřené, $x \in U, \varepsilon > 0$ takové, že $\Omega(x, U) \subseteq U$. Zvolme racionální r takové, že

$$\frac{1}{3}\varepsilon < r < \frac{2}{3}\varepsilon$$

a $y \in M \cap \Omega\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$. Potom zřejmě $x \in \Omega(y, r)$ a je-li $z \in \Omega(y, r)$, je $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{1}{3}\varepsilon + r < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Buď $\mathcal{B}$ spočetná báze, $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí. Označme $\mathcal{B}_1$ množinu všech prvků z $\mathcal{B}$, které se objeví ve vyjádření kteréhokoli prvku z $\mathcal{U}$ jako sčítanec. Potom je $\bigcup \mathcal{B}_1 = \bigcup \mathcal{U} = X$. Ke každému $B \in \mathcal{B}_1$ zvolme $U_B \in \mathcal{U}$, $U_B \supseteq B$. Potom je $\mathcal{V} = \{U_B \mid B \in \mathcal{B}_1\}$ spočetné podpokrytí $\mathcal{U}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Pro každé n je $\left\{\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X\right\}$ pokrytí. Vyberme z něj vždy spočetné podpokrytí $\left\{\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in M_n\right\}$. Položme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. To je spočetná množina a zřejmě je, pro každé $y \in X$, $\rho(y, M) = 0$. $\square$

3.5 VĚTA: *Podprostor separabilního prostoru je separabilní.*

Důkaz: Plyne snadno z 3.4.(ii): Buď Y podprostor X, $\mathcal{B}$ báze prostoru X. Potom je podle XII.3.3.(1) systém $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ báze prostoru Y. $\square$

Poznámka: Přímo z definice je důkaz trochu obtížnější. Zkuste to jako cvičení!

XVII.4 Další fakta o kompaktních prostorech

4.1 Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *totálně omezený*, existuje-li pro každé $\varepsilon > 0$ konečná $M \subseteq X$ taková, že $X = \bigcup\{\Omega(x, \varepsilon) \mid x \in M\}$ (jinak řečeno, že pro každý $x \in X$ je $\rho(x, M) < \varepsilon$).

Poznámka: Zřejmě je každý totálně omezený prostor *omezený* v tom smyslu, že $\rho(x, y) \leq K$ pro nějaké pevné K a libovolné x, y. Na druhé straně omezený prostor totálně omezený být nemusí: viz Příklad 3.1.3.

4.2 VĚTA: *Buď (X,ρ) totálně omezený, f stejnoměrně spojité zobrazení (X,ρ) na (X,σ). Potom je (Y,σ) totálně omezený. Následkem toho stejnoměrné homeomorfizmy a speciálně náhrada metriky metrikou stejnoměrně ekvivalentní totální omezenost zachovávají.*

Důkaz: K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby $\rho(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Buď $M \subseteq X$ konečná taková, že $\bigcup_{x\in M} \Omega(x,\delta) = X$. Potom je $\bigcup_{x\in M} \Omega(f(x),\varepsilon) = Y$. $\square$

Poznámka: Obecné homeomorfizmy nezachovávají ani omezenost.

4.3 VĚTA: *Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.*

Důkaz: Buď X totálně omezený, $Y \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $M \subseteq X$ tak, aby $\bigcup_{x\in M} \Omega\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) = X$. Pro $x \in M$ zvolme $\overline{x} \in \Omega(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap Y$, pokud je tato množina neprázdná, jinak nic. Označme N množinu takto vybraných $\overline{x}$. Zřejmě je $\bigcup_{y\in N} \Omega_Y(y,\varepsilon) = Y$. $\square$

4.4 VĚTA: *Podprostor $\mathbb{E}_n$ je omezený právě když je totálně omezený.*

Důkaz: Vzhledem k 4.3 stačí dokázat, že součiny omezených intervalů jsou totálně omezené. V omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$ najdeme snadno požadovanou množinu k danému $\varepsilon > 0$, třeba $\left\{a + \frac{k}{n}(b-a) \mid k = 0,1,\ldots,n\right\}$ pro dost velké n. V součinu užijeme kartézské součiny těchto množin a odkážeme se na 4.2 a metriku σ z XII.2.6. $\square$

4.5 VĚTA: *Každý totálně omezený prostor je separabilní.*

Důkaz: Ke každému n zvolme konečnou M_n tak, aby $\rho(x, M_n) < \frac{1}{n}$ pro každé x. Potom je zřejmě $M \bigcup M_n$ spočetně hustá. $\square$

4.6 VĚTA: *Metrický prostor je totálně omezený, právě když je z každé posloupnosti možno vybrat podposloupnost cauchyovskou.*

Důkaz: Nechť X je totálně omezený, zvolme konečné M_k takové, že $\bigcup\left\{x, \frac{1}{k} \mid x \in M_k\right\} = X$. Buď $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ libovolná posloupnost v X. Popíšeme proceduru, pomocí níž je možno vybrat cauchyovskou podposloupnost. Jelikož M_1 je konečná, je pro některé $y \in M_1$ v nekonečně mnoha případech $x_n \in \Omega(x, M_1)$. Buď $n = k_1$ první index, pro nějž to nastane.

Mějme již nalezeny indexy $k_1 < \cdots < k_n$ a $y_r \in M_r$ $(r1,\ldots,n)$ tak, že vždy pro nějakou nekonečnou množinu K_r indexů platí

$$\{x_{k_r}, x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}\} \cup \{x_k \mid k \in K_r\} \subseteq \Omega\left(y_r, \frac{1}{r}\right).$$

Jelikož M_{n+1} je konečná, existuje $y_{n+1} \in M_{n+1}$ tak, že $K_{n+1} = \{k \in K_n \mid x_k \in \Omega\left(y_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)\}$ je zase nekonečná. Vyberme k_{n+1} jako první z K_{n+1}, které je za k_n. Touto procedurou dostáváme podposloupnost

$$x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}, \ldots ,$$

která má tu vlastnost, že pro $m,n \geq n_0$ je $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) \leq \frac{1}{n_0}$ a tedy je cauchyovská.
Nechť X není totálně omezený. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $M \subseteq X$ je $X \setminus \bigcup_{x\in M} \Omega(x,\varepsilon) \neq 0$. Zvolme x_1 libovolně a máme-li již x_1, …, x_n nalezeny tak, aby $\rho(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ pro $j \neq k$ zvolme dále $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Omega(x_k, \varepsilon)$. V takto získané $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ platí obecně $\rho(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ pro $j \neq k$ a tedy tam žádná cauchyovská podposloupnost není. $\square$

4.7 VĚTA: *Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz: Je-li kompaktní, je úplný podle XII.6.2 (a XII.6.3), a podle 4.6 je totálně omezený (můžeme vybrat dokonce konvergentní podposloupnost). Je-li totálně omezený a úplný, můžeme z dané posloupnosti podle 4.6 vybrat podposloupnost cauchyovskou, a ta vzhledem k úplnosti konverguje. □

4.8 VĚTA: *(Heine—Borelova) Metrický prostor je kompaktní právě když se z každého pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí.*

Důkaz: I Nechť v X platí tvrzení o pokrytích. Nechť posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost. Tedy žádný bod $y \in X$ není limitou podposloupnosti naší $(x_n)_n$ a tedy pro každé y existuje $\varepsilon(y) > 0$ takové,že $\Omega(y, \varepsilon(y))$ obsahuje x_n jen pro konečný počet indexů n. Z pokrytí $\{\Omega(y, \varepsilon(y)) \mid y \in X\}$ vybereme konečné $\{\Omega(y_j, \varepsilon(y_j)) \mid j = 1, \ldots, k\}$. Každý z x_n musí být v některé $\Omega(y_j, \varepsilon(y_j))$, ty však dohromady obsahují x_n jen s konečně mnoha indexy—spor.

II Nechť X je kompaktní. Podle 4.6 a 4.5 je separabilní a podle 3.4 je tedy možno z každého pokrytí vybrat spočetné. Stačí tedy dokázat, že z každého spočetného pokrytí lze vybrat konečné. Nechť tomu tak není, buď

$$U_1, \ldots, U_n, \ldots$$

pokrytí, z něhož konečné vybrat nelze. Vybírejme z něho podle následující procedury: V_1 je první U_k, které je neprázdné. Jsou-li již $V_1, \ldots, V_n$ nalezeny, bude V_{n+1} první U_k, které není celé obsaženo v $\bigcup_{j=1}^{n} V_j$. Nová posloupnost

$$V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

nadále pokrývá celý prostor (vynechávali jsme jen ty z U_k, které již stejně byli předchozími pokryty) a nyní je již $V_n \setminus \bigcup_{k}^{n-1} V_k$ vždy neprázdná. Vyberme tam vždy bod x_n. Z posloupnosti $(x_n)_n$ vyberme konvergentní podposloupnost s limitou x. Tato limita x musí ležet v některém V_n. A je to spor, protože V_n je okolí bodu x, které zaručeně neobsahuje žádné x_k pro $k \geq n$. □

XVII.5 Ještě dvě věci k úplným prostorům

5.1 Připomeňme si definici prostoru $F(X)$ z XII.1.2.4 a $C(X)$ z XII.2.9. Uvědomme si též, že vzhledem k XII.5.9, *v případě kompaktního X je $C(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X* (všechny jsou totiž omezené).

VĚTA: *$F(X)$ i $C(X)$ jsou úplné prostory.*

Důkaz: Vzhledem k XII.6.5 a XII.2.9 stačí tvrzení dokázat pro $F(X)$. Buď $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ cauchyovská posloupnost v $F(X)$. Tedy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tak, že pro } m, n \geq n_0 \text{ je } \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

a následkem toho pro každé x platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tak, že pro } m, n \geq n_0 \text{ je } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

tedy každá $(f_n(x))_n$ je cauchyovská a jelikož $\mathbb{R}$ je úplný, má nějakou limitu $f(x)$. Tak dostáváme novou reálnou funkci f na X. Ukážeme, že je limitou původní posloupnosti v $F(X)$.

Vezměme $\varepsilon > 0$, zvolme k němu n_0 podle $(*)$ a vezměme $n \geq n_0$. Vezměme $x \in X$ libovolné ale pevné. Pro $m \geq n_0$ máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

a tedy v limitě
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Jelikož x bylo libovolné, znamená to, že $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$ □

5.2 DŮSLEDEK: *Buďte a, b reálná čísla. Podprostor*
$$Y = \{\, f \mid f \in C(X), \forall\, x \; a \leq f(x) \leq b \,\} \subseteq C(X)$$
je úplný.

Důkaz: Je totiž zřejmě uzavřený v $C(X)$. Užijte opět XII.6.5. □

5.3 VĚTA: *(Banachova věta o pevném bodě) Buď (X, ρ) úplný, buď $0 \leq \lambda < 1$, buď $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ zobrazení takové, že*
$$\forall\, x, y \;\; \rho\,(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho(x, y).$$
Potom existuje právě jedno řešení rovnice $f(x) = x$.

Důkaz: Zvolme libovolný bod x_0 a definujme x_n indukcí předpisem $x_{n+1} = f(x_n)$. Máme
$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots$$
a tedy $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n\rho(x_1, x_0)$. Označme $\rho(x_1, x_0) = K$. Je tedy $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq K\lambda^n$ a dále
$$\begin{aligned}\rho(x_{n+r}, x_n) &\leq \rho(x_{n+r}, x_{n+r-1}) + \rho(x_{n+r-1}, x_{n+r-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq K(\lambda^{n+r-1} + \lambda^{n+r-2} + \cdots + \lambda^n + 1 + \lambda^n) = \\ &= K\lambda^n(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{r-1}) \leq \frac{K}{1-\lambda} \cdot \lambda^n.\end{aligned}$$
Posloupnost $(x_n)_n$ je tedy cauchyovská a má tedy nějakou limitu x. Máme
$$f(x) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x.$$
Je-li $f(x) = x$ a $f(y) = y$, je $\rho(x, y) \leq \lambda\rho(x, y)$ a to je možné jen když $\rho(x, y) = 0$, t.j. $x = y$. □

XVII.6 Souvislost

6.1 Jde o to, zachytit intuitivní představu toho, zda prostor „drží“ pohromadě, nebo ne. To bude učiněno v pojmech *souvislosti* (zachytíme představu „nerozpadání se na dvě nebo více oddělených částí“) a silnějším pojmu *obloukové souvislosti* (zachycujícím představu možnosti přechodu beze skoků mezi kterýmikoli dvěma body).

6.2 DEFINICE: Říkáme, že podmnožina M prostoru X je obojetná, je-li zároveň otevřená i uzavřená. V každém prostoru X existují obojetné množiny, totiž $\emptyset$ a X. Říkáme, že neprázdný prostor X je *souvislý*, jsou-li v něm právě dvě obojetné množiny ($\emptyset$ a X, a už žádné další). Jinak mluvíme o prostoru *nesouvislém*

Poznámky:

1 Všimněte si, že prázdný prostor nepovažujeme za souvislý. To má dobré důvody. Nejde jen o to, že tam je obojetná množina jen jedna, nikoli dvě, jak je v definici požadováno. S méně formálním důvodem se setkáme v 6.8.

2 Připomeňte si XII.1.8. Definici souvislosti můžeme přeformulovat takto. Neprázdný prostor je souvislý právě když jej nelze napsat jako sjednocení $A \cup B$ dvou disjunktních otevřených množin. (V této formulaci můžeme samozřejmě nahradit slovo „otevřených“ slovem „uzavřených“.)

6.3 Připomeňte si úmluvu XII.3.5. V jejím smyslu budeme mluvit o *souvislých nebo nesouvislých podmnožinách* nějakého prostoru. Řekneme, že podmnožiny A, B prostoru X jsou *oddělené*, platí-li

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

VĚTA: *Neprázdná podmnožina metrického prostoru je souvislá právě když se nedá napsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin.*

Důkaz: I Nechť $Y \subseteq X$ je souvislá, nechť $Y = A \cup B$, kde A, B jsou oddělené. Položme $U = X \setminus \overline{B}$, $V = X \setminus \overline{A}$. Tedy je zřejmě $A = Y \cap U$, $B = Y \cap V$; A, B jsou tedy otevřené v Y, zřejmě disjunktní. Tedy je jedna z nich prázdná.

II Nechť $Y \subseteq X$ je nesouvislá, nechť $Y = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v Y. Buďte U, V otevřené v X takové, že $A = Y \cap U$, $B = Y \cap V$. Tedy je $A \subseteq X \setminus V$ a jelikož $X \setminus V$ je uzavřená, $\overline{A} \subseteq X \setminus V$. Tedy $\overline{A} \cap V = \emptyset$ a tím spíš $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Podobně $A \cap \overline{B} = \emptyset$. □

6.4 VĚTA: *Podprostor přímky* $\mathbb{R}$ ($\equiv \mathbb{E}_1$) *je souvislý právě když je to neprázdný interval.*

Důkaz: I Nechť $X \subseteq \mathbb{E}_1$ není interval. Existují tedy $a < b < c$ takové, že $a, c \in X$ a $b \notin X$. Potom je

$$X = (X \cap (-\infty, b)) \cup (X \cap (b, +\infty))$$

a oba sčítance jsou neprázdné otevřené.

II Buď $X \subseteq \mathbb{E}_1$ interval, nechť $X = A \cup B$, kde A, B jsou disjunktní uzavřené (v X). Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat existenci bodů $a \in A$, $b \in B$ takových, že $a < b$ (jinak přeznačíme). Položme

$$s = \sup\{\, x \mid x \in A, a \leq x < b \,\}.$$

Zřejmě je $a \leq s \leq b$ a tedy $s \in X$. Z definice suprema vidíme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ je $(s - \varepsilon, s\rangle \cap A \neq \emptyset$, z čehož okamžitě plyne, že $s \in \overline{A}$. Ale zřejmě je též pro libovolné $\varepsilon > 0$ $\langle s, s + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ (body z A již za s až do b neleží, někde však ležet musí, v X jsou). Tedy též $s \in \overline{B}$. Ale s, který je v X, leží buď v A nebo v B a tedy v $A \cap \overline{B}$ nebo v $B \cap \overline{A}$. A a B tedy nejsou oddělené—spor. □

6.5 VĚTA: *Buď* $f : X \to Y$ *spojité zobrazení,* M *souvislá podmnožina* X*. Potom* $f[M]$ *je souvislá.*

Důkaz: Po přechodu k podprostorům stačí dokázat, že je-li $f : X \to Y$ spojité na a je-li X souvislý, je souvislý i Y. A skutečně: Kdyby bylo možno Y napsat jako $A \cup B$, A, B disjunktní neprázdné otevřené, měli bychom $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ s disjunktními neprázdnými otevřenými (XII.2.2) sčítanci. (Kontrolní otázka: Kde jsme užili toho, že f je na?) □

6.6 VĚTA: *Uzávěr souvislé podmnožiny je souvislý.*

Důkaz: Buď $M \subseteq X$ souvislá. Po přechodu k podprostorům stačí dokázat, že je-li $\overline{M} = X$, je X souvislý. Nechť $X = A \cup B$, A, B otevřené disjunktní. Tedy $M = (M \cap A) \cup (M \cap B)$ s (v M) otevřenými disjunktními sčítanci. Je tedy dejme tomu $B \cap M = \emptyset$, tedy $M \subseteq A$, ale jelikož A je uzavřená, je též $X = \overline{M} \subseteq A$. □

6.7 VĚTA: *Nechť* $X = \bigcup\{\, M_i \mid i \in J \,\}$ *a nechť* M_i *jsou souvislé podmnožiny* X *takové, že ke každým dvěma* M_i, M_j *existují* $i_1, \dots, i_n \in J$ *takové, že*

$$i_1 = 1, i_n = j \quad a\ M_{i_k} \cap M_{i_{k+1}} \neq \emptyset \quad pro\ k = 1 \dots, n-1.$$

Potom X *je souvislý.*

Důkaz: Buď $X = A \cup B$, A, B disjunktní otevřené. Jelikož M_i je souvislá a rovna $(A \cap M_i) \cup (B \cap M_i)$, musí být buď $M_i \subseteq A$ nebo $M_i \subseteq B$. Nechť je dejme tomu nějaké pevné $M_i \subseteq A$. Pro libovolné j nalezněme $i_1, \dots, i_n$ podle předpokladu věty. Je-li $M_{i_k} \subseteq A$, je i $M_{i_{k+1}} \subseteq A$, protože má s A neprázdný průnik. Jelikož je ale $M_{i_1} = M_i \subseteq A$, jsou $\subseteq A$ všechny, a tedy i $M_{i_n} = M_j$. Máme tedy $X = \bigcup M_j \subseteq A$ a $B = \emptyset$. □

6.8 VĚTA: *Součin* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *metrických prostorů je souvislý prostor právě když jsou všechny* X_j *souvislé.*

Důkaz: I Nechť X_j jsou souvislé. Tvrzení samozřejmě (proč?) stačí dokázat pro $n = 2$. Máme

$$X_1 \times X_2 = \bigcup\{\, X_1 \times \{x\} \mid x \in X_2 \,\} \cup \{\{x_0\} \times X_2\}.$$

Užijte 6.7.

II Je-li $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ souvislý, vezměme projekce $p_j : X \to X_j$. Jsou-li X_k neprázdné, jsou p_j zobrazení na a tedy jsou souvislé podle 6.5. □

DEFINICE: Řekněme, že neprázdný prostor X je *obloukově souvislý* (někdy se též říká *křivkově souvislý*), existuje-li ke každým dvěma bodům $x, y \in X$ spojité zobrazení

$$\varphi : I = \langle 0, 1 \rangle \to X$$

takové, že $\varphi(0) = x$ a $\varphi(1) = y$. (O zobrazení φ někdy mluvíme jako o *křivce* nebo o *cestě* spojující body x a y).

6.9 VĚTA: *Obloukově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz: Zvolme pevně $x_0 \in X$ a ke každému $x \in X$ křivku φ_x takovou, že $\varphi_x(0) = x_0$ a $\varphi_x(1) = x$. Položme $M_x = \varphi_x[I]$. Podle 6.5 a 6.4 je každá M_x souvislá. Zřejmě $M_x \cap M_y \ni x$ a $\bigcup M_x = X$. Tedy je X souvislý podle 6.7. □

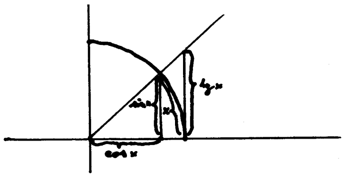
6.10 VĚTA: *Buď* $f : X \to Y$ *spojité, buď* $M \subseteq X$ *obloukově souvislá podmnožina* X*. Potom je i* $f[M]$ *obloukově souvislá.*

Důkaz: Buďte $x', y' \in f[M]$, $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, $x, y \in M$. Nechť $\varphi : I \to M$ spojuje x a y. Potom $f \circ \varphi$ spojuje x' a y'. □

6.11 Souvislá množina obloukově souvislá být nemusí. Vezměme třeba $X = J \cup S$, podmnožinu $\mathbb{E}_2$, kde S je graf funkce $\sin \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ a $J = \{\, (0, x) \mid -1 \leq x \leq 1 \,\}$ (viz obrázek XVII.1). Zřejmě S je souvislá (viz 6.5 a 6.4) a tedy $X = \overline{S}$ je podle 6.6 souvislý též. Zkuste však spojit bod na J s bodem na S křivkou (ujasněte si, proč to nejde udělat!). Platí však

VĚTA: *Souvislý otevřený prostor v* $\mathbb{E}_n$ *je obloukově souvislý.*

Důkaz: Buď $X \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená souvislá. Pro $x \in X$ označme $A(x)$ podmnožinu X sestávající z těch bodů, které lze v X spojit s x křivkou. Pozorujeme:



Obr. XVII.1:

(a) Je-li x možno spojit křivkou s y a y se z, je možno spojit x se z. (Nechť $\varphi_1 : I \to X$, $\varphi_2 : I \to X$ jsou spojité takové, že $\varphi_1(0) = x$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = y$ a $\varphi_2(1) = z$. Definujeme $\varphi : I \to X$ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi_2(2t-1) & \text{pro } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .)$$

(b) $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ nebo $A(x) = A(y)$ (užijte (a)).

(c) Každá $A(x)$ je otevřená. Skutečně, buď $y \in A(x)$. Pro dost malé $\varepsilon > 0$ je $K = \Omega(y, \varepsilon) \subseteq X$ (tady užíváme toho, že X je otevřená). Každý prvek $z \in K$ je možno spojit s y, totiž křivkou

$$\varphi(t) = y + t(z - y)$$

a tedy, opět podle (a), $K \subseteq A(x)$. Vezměme nyní libovolné $x \in X$. Máme

$$X = A(x) \cup \bigcup \{A(y) \mid A(y) \cap A(x) = \emptyset\}.$$

To je sjednocení dvou disjunktních otevřených množin, jelikož je ale $A(x) \neq \emptyset$ a X souvislý, je druhý sčítanec prázdný, a tedy $X = A(x)$. $\square$

XVIII Soustavy (obyčejných) diferenciálních rovnic

XVIII.1 Úloha

1.1 Soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme úlohu najít funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ takové, že platí

$$y_k' = f_k(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{XVIII.1}$$

Slovem „obyčejné“ se dává najevo, že v úloze se vyskytují jen derivace funkcí jedné proměnné, nikoli derivace parciální.

Užitím vektorové symboliky můžeme samozřejmě úlohu zapsat jednodušeji jako

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)).$$

1.2 Obecněji se můžeme setkat se soustavami, v nichž jde o derivace vyšších řádů. Třeba:

$$\begin{aligned} y_1^{(4)} &= f_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'', y_1''', y_2'''), \\ y_1''' &= f_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'', y_1'''). \end{aligned} \tag{XVIII.2}$$

Ty je ale možno na úlohy typu (XVIII.1) snadno převést. Například tuto konkrétní úlohu takto:

Zavedeme označení

$$z_1 = y_1, z_2 = y_2, z_3 = y_1', z_4 = y_2', z_5 = y_1'', z_6 = y_2'', z_7 = y_1''',$$

a místo (XVIII.2) řešíme úlohu

$$z_1' = z_3, z_2' = z_4, z_3' = z_5, z_4' = z_6, z_5' = z_7,$$

$$z_6' = f_2(x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7),$$

$$z_7' = f_1(x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, f_2(x, z_1, \ldots, z_7)),$$

která již typu (XVIII.1) je. Ujasněte si, že obdobně je možno postupovat ve značně obecné třídě úloh.

1.3 Zejména do této třídy spadá případ jedné diferenciální rovnice $n-$tého řádu

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Ta se především pomocí věty o implicitních funkcích převádí (lokálně, a tam, kde to podmínky věty dovolí) na

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});$$

Nyní můžeme položit

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)},$$

a máme soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

1.4 Překlady z 1.2 a 1.3 slouží především teoretickým účelům (jako je otázka existence a jednoznačnosti řešení). K nalezení konkrétních řešení se obvykle užívá příjemnějších metod.

1.5 Poznámka k symbolice: Rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ se běžně zapisuje tak, jak jsme to již v 1.2 – 1.3 dělali, ve tvaru $y' = f(x, y)$ a y zde vystupuje ve dvou rolích: jako označení proměnné ve funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, a jako funkce $y(x)$. Tato nedůslednost jistě nikoho nemate a zápis se značně zjednodušuje.

1.6 Diferenciální rovnice a jejich soustavy hrají zásadní roli v řadě aplikací. Zde není místo na to, abychom o tom podrobně pojednávali. Zmíníme se ale o zřejmé geometrické interpretaci:

Vezměme třeba rovnici $y' = f(x, y)$. Funkce $f(x, y)$ určuje v každém bodě svého definičního oboru směr; grafy hledaných funkcí jsou křivky, které v každém bodě sledují takto předepsané směry. Viz obrázek:

XVIII.2 Převedení diferenciální soustavy na soustavu integrální.

2.1 VĚTA: *Buďte $\eta_1, \ldots, \eta_n$ reálná čísla. Funkce $y_1, \ldots, y_2$ řeší na intervalu (a, b) obsahující bod x_0 soustavu*

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \qquad j = 1, \ldots, n$$

a splňují při tom podmínky $y_j(x_0) = \eta_j$ právě když vyhovují rovnicím

$$y_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt + \eta_j$$

Důkaz: Nechť funkce vyhovují první úloze. Potom podle je

$$y_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt + c_j,$$

kde c_j jsou nějaké konstanty. Dosazením $x = x_0$ se anuluje integrál napravo a dostáváme $\eta_j = y_j(x_0) = c_j$. Na druhé straně, splňují-li funkce druhou úlohu, dostáváme derivací integrálu podle horní meze

$$y_j'(x) = f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

a dosazením x_0 za x zjistíme, že $y_j(x_0) = \eta_j$. $\square$

2.2 V podstatě triviální obrat z 2.1 má dalekosáhlé důsledky. Ilustrujme si to na případě jedné rovnice

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Označme D operátor derivace, F operátor přiřazující funkci $y(x)$ funkci $F(y)(x) = f(x, y(x))$. Jde tedy o nalezení funkce y takové, že

$$D(y) = F(y).$$

Tedy, chceme-li, funkce v níž operátor $D - F$ nabývá hodnoty o (konstantní nulové funkce). Při běžné metrice v prostoru funkcí (viz. XII.2.9) je ale D nespojité zobrazení (pro funkce libovolně blízké se mohou derivace velice lišit – viz obrázek)

a taková nespojitost neslibuje pro řešení rovnic v metrických prostorech nic dobrého. Na druhé straně, definujeme operátor J předpisem

$$J(y)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt + \eta.$$

Je-li f jen trochu rozumná, jsou při malých změnách argumentu y i změny hodnost $J(y)$ malé. Nadto je nová úloha, hledání y takového, že $y = J(y)$, úloha nalezení pevného bodu, o níž již něco víme (viz XVII.5.3).

XVIII.3 Lipschitzova vlastnost a řešení integrální úlohy.

3.1 Buď $f(x, y_1, \dots, y_n)$ funkce $n+1$ proměnných. Řekneme, že f je *Lipschitzovská* v proměnných $y_1, \dots, y_n$, existuje-li číslo M takové, že platí

$$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| \le M \cdot \max |y_i - z_i|.$$

Existuje-li ke každému bodu okolí U takové, že $f|U$ je Lipschitzovská, říkáme, že je *f lokálně Lipschitzovská.*

3.2 Uvědomme si, že má-li f spojité parciální derivace podle proměnných $y_1, \dots, y_n$, je v těchto proměnných lokálně Lipschitzovská:

Skutečně vezměme číslo M takové, že v nějakém okolí daného bodu platí

$$\left| \frac{\partial f(f(x, y_1, \dots, y_n))}{\partial y_j} \right| \le \frac{M}{n}.$$

Potom tam máme (viz XIII.3.4)

$$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| = \left| \sum_j \frac{\partial f(\dots)}{\partial y_j}(y_j - z_j) \right| \le$$

$$\leq \sum \left| \frac{\partial f(\dots)}{\partial y_j} \right| \cdot |y_j - z_j| \leq n \cdot \frac{M}{n} \cdot \max |y_j - z_j|.$$

3.3 VĚTA: *Buďte $f_j(x, y_1, \dots, y_n), j = 1, \dots, n$ spojité funkce ve všech proměnných a Lipschitzovské v proměnných $y_1, \dots, y_n$ v nějakém okolí bodu $(x_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Potom existuje a takové, že v intervalu $(x_0 - a, x_0 + a)$ má soustava*

$$\varphi_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, \vec{\varphi}(t))\, dt + \eta_j, \qquad j = 1, \dots, n \tag{XVIII.3}$$

právě jedno řešení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Důkaz: Nechť pro

$$|x_0 - x| \leq \alpha, |\eta_j - y_j| \leq \beta, |\eta_j - z_j| \leq \beta$$

máme

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, \dots, z_n)| \leq M \cdot \max_j |y_i - z_i|.$$

Ze spojitosti dále plyne existence čísla A takového, že pro x a y_j splňující naše podmínky je

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq A.$$

Vezměme nyní $a, 0 < a \leq \alpha$ takové, aby

(1) $a \leq \frac{B}{A}$

a aby

(2) pro nějaké $q < 1$ bylo $a \leq \frac{q}{M}$.

Smysl prvního opatření bude patrný téměř hned, smysl druhého o něco později.

Označme

$$Y_j$$

podprostor prostoru $C((x_0 - a, x_0 + a))$ (XII.2.9) tvořený všemi φ takovými, že $\eta_j - \beta \leq \varphi(x) \leq \eta_j + \beta$. Podle XVII.5.2 jsou Y_j úplné metrické prostory, podle XII.6.6 je $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ úplný.

Pro $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in Y$ definujeme

$$J(\vec{\varphi}) = (J_1(\vec{\varphi}), \dots, J_n(\vec{\varphi}))$$

předpisem

$$J_k(\vec{\varphi})(x) = \int_{x_0}^{x} f_k(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))\, dt + \eta_k$$

Máme

$$|J_k(\vec{\varphi})(x) - \eta_k| = \left| \int_{x_0}^{x} f_k(t, \varphi_1(t), \dots)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, \varphi_1(t), \dots) \right| dt \leq |x_0 - x| \cdot A \leq a \cdot A \leq \beta$$

takže $J(\vec{\varphi})$ je zase v Y. To byl důvod opatření (1). Máme tedy zobrazení

$$J : Y \to Y$$

při čemž v úloze (XVIII.3) jde o nalezení pevného bodu $\vec{\varphi}$. Mějme $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in Y$. Platí (v Y užijeme pohodlné metriky σ z XII.4.2)

$$\sigma(J(\vec{\varphi}), J(\vec{\psi})) = \max_k \sup_x \left| J_k(\vec{\varphi})(x) - J_k(\vec{\psi})(x) \right| =$$

$$= \max_k \sup_x \left| \int_{x_0}^{x} f_k(t, \varphi_1(t), \dots)\, dt - \int_{x_0}^{x} f_k(t, \psi_1(t), \dots)\, dt \right| =$$

$$= \max_k \sup_x \left| \int_{x_0}^{x} (f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots))\, dt \right| \le$$

$$= \max_k \sup_x \int_{x_0}^{x} |f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots)|\, dt = c.$$

Máme $|f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots)| \le M \cdot \max_j |\varphi_j(t) - \psi_j(t)| \le M \cdot \max_j \sup_x |\varphi_j(x) - \psi_j(x)| = M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$, takže dále dostáváme

$$c \le \max_k \sup_x |x - x_0| \cdot M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \le a \cdot M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \le q \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$$

(tady jsme užili opatření (2)).

Zobrazení J tedy splňuje podmínky věty XVII.5.3 a má tedy právě jeden pevný bod. □

XVIII.4 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy (obyčejných) diferenciálních rovnic

4.1 Z věty 3.3 a 2.1 okamžitě dostáváme

DŮSLEDEK: *Buďte $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ funkce spojité ve všech proměnných a Lipschitzovské v proměnných $y_1, \dots, y_n$ v nějakém okolí bodu $(x_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Potom pro dost malé $a > 0$ má soustava*

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \qquad j = 1, \dots, n \tag{XVIII.4}$$

právě jedno řešení $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takové, že $\varphi_j(x_0) = \eta_j$ pro všechna j.

4.2 Jednoznačnost řešení je tedy podmíněna splněním požadavků $\varphi_j(x_0) = \eta_j$ pro všechna j. Říká se jim *počáteční podmínky*.

4.3 Tvrzení z věty 4.1 mluví o tom, jak vypadá řešení soustavy (XVIII.4) v malém okolí nějakého bodu. Nyní budeme směřovat ke globálním řešením.

Lokálním řešením soustavy (XVIII.4) rozumějme dvojici $(\vec{\varphi}, J)$, kde J je nějaký otevřený interval a $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je definován na J a splňuje tam (XVIII.4).

LEMMA: *Nechť J, K jsou otevřené intervaly, $x_0 \in J \cap K$ a $(\vec{\varphi}, J), (\vec{\psi}, K)$ lokální řešení takové, že $\varphi(\vec{x_0}) = \vec{\psi}(x_0)$. Je-li f spojitá a v proměnných y_j lokálně Lipschitzovská v oboru, v němž soustavu (XVIII.4) řešíme, je pak $\vec{\varphi}|J \cap K = \vec{\psi}|J \cap K$.*

Důkaz: Podle 4.1, shodují-li se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ v nějakém bodě, shodují se i na nějakém okolí. Obor U v němž se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ shodují je tedy neprázdná otevřená podmnožina $J \cap K$. Nechť se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ shodují v $x_1, x_2, \dots$ a nechť $\lim x_n = x \in J \cap K$. Ze spojitosti okamžitě plyne, že je pak i $\vec{\varphi}(x) = \vec{\psi}(x)$. U je tedy též uzavřená. Jelikož $J \cap K$ je interval a tedy souvislý prostor, musí být $U = J \cap K$ (viz [XVII-6]). □

4.4 Sjednoťme všechny intervaly J obsahující x_0 takové, že na nich existují řešení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ splňující počáteční podmínky $\varphi_j(x_0) = \eta_j$. Podle 4.3 na takto získaném intervalu opět existují řešení. Máme tedy největší řešení soustavy (XVIII.4) splňující $\varphi_j(x_0) = \eta_j$, přesněji, řešení s největším možným souvislým definičním oborem. Takováto maximální řešení se nazývají *charakteristiky* dané soustavy.

4.5 V této terminologii můžeme dosavadní výsledky shrnout takto:

VĚTA: *Buď M otevřená podmnožina E_{n+1}, $f_j(x, y_1, \ldots, y_n) : M \to \mathbb{R}$ spojité funkce lokálně Lipschitzovské v proměnných $y_1, \ldots, y_n$. Potom každým bodem množiny M prochází právě jedna charakteristika soustavy (XVIII.4).*

4.6 Vraťme se nyní k překladu diferenciální rovnice $n-$tého řádu z 1.3. Rovnice

$$y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{(n+1)})$$

byla přepsána na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Z věty 4.5 dostáváme

DŮSLEDEK: *Buď M otevřená podmnožina E_{n+1}, $f(x, y_1, \ldots, y_n) : M \to \mathbb{R}$ spojitá funkce lokálně Lipschitzovská v proměnných $y_1, \ldots, y_n$. Potom ke každému bodu $(x_0, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) \in M$ existuje právě jedno řešení y, s maximálním souvislým definičním oborem, rovnice*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

takové, že $y(x_0) = \eta_0, y'(x_0) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$.

4.7 Splněním Lipschitzovy podmínky je pro jednoznačnost řešení podstatné. Vezměme následující příklad: Funkce $y(x) = (x + c)^3$ vyhovující rovnici

$$y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

Funkce $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ je Lipschitzovská všude kromě bodu $(x, 0)$. A v těchto podezřelých bodech skutečně jednoznačnost neplatí. Máme totiž také řešení

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{pro } x \le a \\ 0 & \text{pro } a \le x \le b \\ (x-b)^3 & \text{pro } x \ge b \end{cases}.$$

XVIII.5 Několik konkrétních případů

5.1 Především si uvědomme, že vzhledem k tomu, že máme větu o existenci a zejména jednoznačnosti, nemusíme si u metod řešení dělat velkou starost s korektností použitých metod („rozpojování“ $\frac{dy}{dx}$, otázka zda se nevyskytne nula ve jmenovateli a pod.). Dá-li nám nějaký postup funkci, která rovnici splňuje, musí to být ono jediné řešení, které hledáme.

5.2 S jednou diferenciální rovnicí jsme se setkali již dávno (v kapitoleVI), totiž s rovnicí typu

$$y' = f(x).$$

Jejím řešení je primitivní funkce k funkci f. Ani tu často nebývá snadné najít. Je ale zvykem považovat diferenciální rovnici za „vyřešenou“ je-li převedena na úlohu nalezení nalezení primitivních funkcí. (Je zde dost hluboká analogie s řešením algebraických rovnic v odmocninách.)

5.3 Metoda separace proměnných: Rovnici tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

můžeme řešit takto: Přepíšeme na

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x)$$

a najdeme primitivní funkce obou stran, které se kvůli rovnosti smí lišit pouze o konstantu. Tedy máme

$$\left(\int \frac{1}{g} \right) (y(x)) = \left(\int f \right) (x) + C.$$

To je asi trochu nepřehledný zápis toho, co děláme. Snadněji si to zapamatujeme takto: Vezměme naši rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

přepíšeme na

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

a zintegrujeme na

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

PŘÍKLADY:

1. $y' = y \cdot \sin x$.

   Dostáváme

   $$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x + C,$$

   tedy

   $$\lg |y| = -cosx + C$$

   a z toho

   $$|y| = e^{-\cos x + C}$$

   což lépe napíšeme jako $y = D \cdot e^{-\cos x}$.

2. $y' = 1 + y^2$.

   Dostaneme

   $$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx + C,$$

   tedy $\operatorname{arctg} y = x + C$ a konečně $y = \operatorname{tg}(x + C)$.

3. $y' = -\frac{x}{y}$.

   Dostáváme

   $$\int y\, dy = -\int x\, dx + C,$$

   tedy $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$ a konečně $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R = \sqrt{2C}$. To je velmi názorný příklad. Uvědomme si: Co je to za křivky, které jsou v každém bodě $[x, y]$ kolmé k polohovému vektoru (x, y)?

5.4 Abychom vyřešili rovnici

$$y' = f(ax + by)$$

zavedeme substituci

$$z(x) = ax + by(x).$$

Potom máme

$$z' = by' + a = b \cdot f(z) + a,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, jako v 5.3. Je zvlášť jednoduché, pravá strana na proměnné x ani nezávisí.

5.5 Abychom vyřešili rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(t.j., rovnici $y' = F(x, y)$, kde F je taková, že pro libovolné t je $F(x, y) = F(tx, ty)$), zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$. Potom máme

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y' - z}{x} = (f(z) - z) \cdot \frac{1}{x}$$

a máme rovnici se separovanými proměnnými.

5.6 Rovnice

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

je v případě $\gamma = c$ rovnice typu 5.5. Není-li tomu tak, pokusíme se toho dosáhnout. Buď x_0, y_0 řešení soustavy (algebraických) rovnic

$$\begin{array}{rcl} ax + bx + c &=& 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &=& 0. \end{array} \qquad \text{(XVIII.5)}$$

Potom

$$\frac{ax + bx + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)}.$$

Zavedeme-li tedy substituci

$$\xi = x - x_0, \ z = y - y_0,$$

máme $z(\xi) = y(x - x_0) - y_0$ a $\frac{dx}{d\xi} = 1$, takže

$$\frac{dz}{d\xi} = y'(\xi) = f\left(\frac{a\xi + bz}{\alpha\xi + \beta z}\right).$$

Lineární soustavu XVIII.5 však třeba nešlo řešit, mohlo totiž být $(a, b) = K \cdot (\alpha, \beta)$ nebo $(\alpha, \beta) = K \cdot (a, b)$. V takovém případě naše rovnice

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

je již bez úprav tvaru $y' = F(Ax + By)$ (viz. 5.4).

5.7 Lineární rovnice $y' = a(x) \cdot y + b(x)$. První setkání s metodou variace konstant. Vyřešíme nejprve rovnici $y' = a(x) \cdot y$. To je příklad se separovanými proměnnými a způsobem uvedeným v 5.3 dostaneme řešení

$$\varphi_c(x) = C \cdot e^{\int a(x)\, dx}. \qquad \text{(XVIII.6)}$$

Zkusíme najít řešení původní rovnice $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ ve tvaru

$$y(x) = c(x) \cdot \varphi_1(x) = c(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}.$$

(Proto, že konstantu C z XVIII.6 nahrazujeme funkcí závislou na x se hovoří o *metodě variace konstant.* V obecnější podobě se s touto metodou setkáme v příští kapitole.) Má tedy být

$$y' = c' \cdot \varphi_1 + c \cdot \varphi_1'$$

a jelikož $\varphi_1' = a \cdot \varphi_1$ máme dále

$$y' = c' \cdot \varphi_1 + c \cdot a \cdot \varphi_1 = c'\varphi_1 + a \cdot y.$$

Jde tedy o to najít $c(x)$ tak, aby

$$b(x) = c'(x)\varphi_1(x).$$

Tomu vyhovuje

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + K.$$

5.8 Aspoň jedna rovnice druhého řádu: Ve fyzice se setkáváme s variantami úlohy

$$y'' = f(y).$$

Tuto rovnici je možno řešit takto: Po vynásobení obou stran derivací y' dostaneme

$$y' \cdot y'' = f(y) \cdot y',$$

tedy

$$\left(\frac{1}{2}y'^2\right)' = \left(\left(\int f\right) \circ y\right)'$$

a tedy

$$\frac{1}{2}y'^2 = \left(\int f\right) \circ y + C$$

a konečně

$$y' = \sqrt{2\left(\int f\right) \circ y + C},$$

což již můžeme řešit separací proměnných.

XIX Lineární diferenciální rovnice a jejich soustavy.

XIX.1 Lineární úlohy

1.1 Soustavou lineárních diferenciálních rovnic rozumíme následující speciální případ úlohy z předchozí kapitoly:

$$(L) \qquad y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j(x) + b_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Lineární rovnice $n-$tého řádu je

$$(\tilde{L}) \qquad y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) = b(x).$$

Podle XVIII.1.2 je $(\tilde{L})$ snadné převést na úlohu typu (L); teoretické úvahy tedy stačí provádět pro soustavy. V praktických postupech řešení se ale budeme úlohám typu $(\tilde{L})$ věnovat zvlášť.

Jsou-li všechny funkce $b_i(x)$ v (L) nulové (resp. je-li $b(x)$ v $(\tilde{L})$ nulové), mluvíme o úloze homogenní.

1.2 Lemma: *Nechť je f funkce spojitá a omezená na intervalu $\langle a, b)$. Potom existuje $\int_a^b f(t)\,dt$ (hodnotu v b můžeme samozřejmě dodefinovat libovolně – viz XV.3.5) a platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Důkaz: Buď $|f(t)| \le C$. Zvolme $z > 0$. Integrály $\int_a^x f(t)\,dt$ existují podle XV.4.1 a můžeme tedy zvolit podrozdělení $D(x)$ tak, že

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le s\left(f|\langle a, x\rangle, D(x)\right) \le S\left(f|\langle a, x\rangle, D(x)\right) \le \int_a^x f + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(XIX.1)}$$

Nechť $x > b - \frac{\varepsilon}{2C}$. Definujeme rozdělení $D'(x)$ intervalu $\langle a, b\rangle$ přidáním intervalu $\langle x, b\rangle$ k $D(x)$. Potom máme

$$s(f|\langle a, x\rangle, D(x)) - \frac{\varepsilon}{2} \le s(f|\langle a, x\rangle, D(x)) - (b - x) \cdot C \le$$

$$s(f, D'(x)) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f, D'(x)) \qquad \text{(XIX.2)}$$

$$\le S(f|\langle a, x\rangle, D(x)) + (b - x) \cdot C \le S(f|\langle a, x\rangle, D(x)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z (XIX.1) a (XIX.2) dostaneme

$$\int_a^x f - \varepsilon \le \underline{\int}_a^b \le \overline{\int}_a^b f \le \int_a^x +\varepsilon,$$

tedy

$$\left| \int_a^x f - \underline{\int}_a^b f \right| \le \varepsilon \qquad \text{i} \qquad \left| \int_a^x f - \overline{\int}_a^b f \right| \le \varepsilon$$

takže vidíme, že

$$\underline{\int}_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \overline{\int}_a^b f.$$

□

1.3 VĚTA: *Buďte $a_{ij}(x), b_i(x)$ spojité na intervalu J, buď $x_0 \in J$, buďte $\eta_j, j = 1, \dots, n$ reálná čísla. Potom má soustava*

$$y_i'(x) = \sum a_{ij} y_j(x) + b_i(x) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

(právě jedno) řešení $y_1, \dots, y_n$ takové, že $y_i(x_0) = \eta_i$ definované na celém intervalu J.

Důkaz: Jednoznačnost plyne z věty XVIII.4.5. Z téže věty plyne, že existuje řešení na nějakém okolí bodu x_0. Ukážeme, že řešení je možno prodloužit na celý interval J. Konkrétně provedeme důkaz, že je možno prodloužit na část od x_0 napravo, prodloužení nalevo je zcela obdobné.

Připomeňme si oddíl XVIII.2. Označme M množinu všech $z \in J, z \ge x_0$ takových že existuje řešení úlohy

$$y_i(x) = \int_{x_0}^x \left(\sum a_{ij}(t) y_j(t) + b_i(t) \right) dt + \eta_i$$

na $\langle x_0, z \rangle$. Označme $s = \sup M$. Pokud by M nebylo celé $J \cap \langle x_0, +\infty)$, muselo by být

(1) s konečné a

(2) $s \in J \setminus M$.

((1) je zřejmé; co se týče (2), buď je $s < \sup J$ a potom, kdyby řešení bylo definováno ještě v s, je podle XVIII.3.3 definováno ještě v nějakém okolí bodu s, nebo je $s = \sup J$ a potom s nesmí být v M ale musí být v J, protože je to jediný bod, v němž se ještě může $J \cap \langle x_0, +\infty)$ od M lišit.)

Jelikož a_{ij}, b_i jsou definovány a spojité na $\langle x_0, s \rangle$, jsou tam omezené, dejme tomu

$$|a_{ij}(x)| \le A, \qquad |b_i(x)| \le B.$$

Zvolme čísla C, α dostatečně velká taková, aby

$$\alpha > 2nA \qquad \text{a} \qquad B(s - x_0) + \max \eta_i < \frac{C}{2} e^{\alpha x_0}.$$

Definujme $\tilde{M}$ jako podmnožinu M tvořenou těmi body, v nichž pro řešení naší úlohy platí

$$|y_i(x)| < C \cdot e^{\alpha x}.$$

$\tilde{M}$ je zřejmě otevřené v M. Případným zvětšením konstanty C dosáhneme toho, že je i neprázdné. Ukážeme, že je i uzavřená, čímž bude, vzhledem k tomu, že M

je souvislá (připomeňme si XVII.6) dokázáno, že je rovna M. Stačí ovšem ukázat, že je uzavřená na limity rostoucích posloupností (proč?). Nechť tedy $(x_n)_n$ roste, $x_n \in \tilde{M}$ a $\xi = \lim x_n$. Všimněte si, že nepředpokládáme, že by ξ bylo v M; to z následujícího vyjde samo a bude ještě dále použito.

Ze spojitosti máme hned $|y_i(x)| \leq Ce^{\alpha x}$ na $\langle x_0, \xi\rangle$ a tedy podle 1.2 existuje integrál,

$$\int_{x_0}^{\xi} \left(\sum a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t)\right)\, dt$$

a je roven $\lim_{x\to\xi-}\int_{x_0}^{x}(...) = \lim_{x\to\xi-} y_i(x_n)$. Dodefinujeme-li případně $y_i(\xi)$ touto hodnotou (bylo-li již $y_i(x)$ definováno, nic se vzhledem ke spojitosti nezmění), máme řešení soustavy prodlouženo do ξ včetně (a tedy $\xi \in M$). Máme ale

$$\left|\int_{x_0}^{\xi} \left(\sum a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t)\right)\, dt + \eta_i\right| \leq \int_{x_0}^{\xi} \left(nA\cdot Ce^{\alpha t} + B\right)\, dt + |\eta_i| \leq$$

$$\leq \frac{nAC}{\alpha}e^{\alpha\xi} + B(\xi - x_0) + |\eta_i| < Ce^{\alpha\xi},$$

takže nejen, že ξ je v M, ale je také ještě v $\tilde{M}$. Je tedy $M = \tilde{M}$. Teď ale přijde ke cti to, že jsme o ξ předem nepředpokládali, že je v M: Bod s můžeme také napsat jako limitu rostoucí posloupnosti prvků z M (a tedy z $\tilde{M}$) a je tedy v M ve sporu s předpokladem $s \in J \setminus M$ (což, připomínám, bylo důsledkem předpokladu $M \neq J \cap \langle x_0, +\infty)$). Tedy máme $M = J \cap \langle x_0, +\infty)$. $\square$

1.4 DŮSLEDEK: *Buďte $a_i(x), (i = 1, \ldots, n-1), b(x)$ spojité na intervalu J, buď $x_0 \in J$, buďte η_i, $i = 1, \ldots, n-1$ reálná čísla. Potom má rovnice*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) = b(x)$$

(právě jedno) řešení na intervalu J, splňující požadavky $y^{(j)}(x_0) = \eta_j$.

1.5 POZNÁMKA: *Na předchozích tvrzeních je podstatné to, že se řešení dají prodloužit na celý interval, na kterém jsou definovány funkce a_{ij}, b_j (resp. a_i, b). Lokální existence a jednoznačnost je dána již větou XVIII.4.5.*

Všimněte si, jak je linearita podstatná: Řešení rovnice

$$y' = 1 + y^2$$

(viz XVIII.5.3.2) jsou funkce $\mathrm{tg}(x+c)$, *všechny definovány jen na omezených intervalech.*

XIX.2 Prostory řešení lineární soustavy.

2.1 V tomto odstavci jsou $a_{ij}(x), b_i(x), a_i(x), b(x)$ definovány a spojité na intervalu J. $C(J)$ označuje vektorový prostor všech spojitých funkcí na J, $C^n(J)$ je vektorový prostor

$$\underbrace{C(J) \times \cdots \times C(J)}_{n}.$$

2.2 VĚTA: *Systém všech řešení soustavy (L) tvoří lineární množinu $\vec{y_0} + W$ v $C^n(J)$, systém všech řešení soustavy $(\tilde{L})$ tvoří lineární množinu $y_0 + W$ v $C(J)$. Přitom jsou vektorové podprostory W soustavy všech řešení příslušných homogenních úloh.*

Důkaz: Provedeme třeba pro (L). Zřejmě, řeší-li $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n), \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ příslušnou homogenní úlohu $(L-\text{hom})$, řeší ji i $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}$; vektor složený konstantních nulových funkcí $(L-\text{hom})$ samozřejmě řeší a tedy je systém všech řešení úlohy $(L-\text{hom})$ vektorový podprostor W prostoru $C^n(J)$. Nechť nyní $\vec{y_0} = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$ řeší (L). Je tedy

$$y'_{0i} = \sum a_{ij} y_{0j} + b_i.$$

Řeší-li $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ úlohu $(L-\text{hom})$, je $y'_i = \sum a_{ij} y_j$ a tedy $(y_{0i} + y_i)' = y'_{0i} + y'_i = \sum a_{ij}(y_{0j} + y_j) + b_i$, takže $\vec{y_0} + \vec{y}$ řeší úlohu (L). Naopak je-li $\vec{z}$ libovolné řešení úlohy (L), je

$$(z_i - y_{0i})' = \sum a_{ij}(z_j - y_{0j}),$$

takže $\vec{z} - \vec{y_0} \in W$ a konečně $\vec{z} = \vec{y_0} + (\vec{z} - \vec{y_0}) \in \vec{y_0} + W$. $\square$

POZNÁMKA: *Všimněte si nápadné podobnosti s tvarem řešení lineární algebraické soustavy rovnic (VIII.3.3). Jde samozřejmě o stejný princip.*

2.3 VĚTA: *V obou případech z předchozí věty mají lineární množiny dimenzi právě n.*

Důkaz: Provedeme pro systém (L). Buďte $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_p}$ řešení $(L-\text{hom})$, buď $p > n$. Potom má lineární algebraická soustava rovnic

$$\begin{aligned} y_{11}(x_0)\cdot\alpha_1 + y_{21}(x_0)\cdot\alpha_2 + \cdots + y_{p1}(x_0)\cdot\alpha_p &= 0 \\ &\vdots \\ y_{1n}(x_0)\cdot\alpha_1 + y_{2n}(x_0)\cdot\alpha_2 + \cdots + y_{pn}(x_0)\cdot\alpha_p &= 0 \end{aligned}$$

v neznámých $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ netriviální řešení (má totiž celý prostor dimenze $p - n$ řešení). Jedno takové vezměme a položme

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{y_i}.$$

Speciálně máme $\vec{y}(x_0) = (0, \ldots, 0)$. Jedno takové řešení soustavy $(L-\text{hom})$ ale známe, totiž $\vec{o} = (const_0, \ldots, const_0)$. Z věty o jednoznačnosti tedy plyne, že $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{y_i} = \vec{o}$ a vidíme, že soustava $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_p}$ je závislá. Na druhé straně, n nezávislých řešení jistě existuje: vezměme $\vec{y_i} = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ takové řešení, že platí $y_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$, tedy $\vec{y_i}(x_0) = \vec{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 na $i-$tém místě). Je-li $\sum \alpha_i \vec{y_i} = o$, je po dosazení x_0 speciálně $\sum \alpha_i \vec{e_i} = (0, \ldots, 0)$ a tedy $\alpha_i = 0$ pro všechna i. $\square$

2.4 Wronského determinanty Jsou-li $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ řešení soustavy $(L-\text{hom})$, položíme

$$W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x), & \ldots, & y_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x), & \ldots, & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Pro řešení $y_1, \ldots, y_n$ rovnice $(\tilde{L}-\text{hom})$ se zavádí

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_n(x) \\ y'_1(x), & \ldots, & y'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Funkce $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})$ resp. $W(y_1, \ldots, y_n)$ se nazývají Wronského determinanty (nebo Wronskiány) příslušných soustav.

POZNÁMKA: *Uvědomte si, že druhý případ je vlastně speciálním případem prvního, získaným při standardním překladu z XVIII.2.*

2.5 VĚTA: *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ *jsou nezávislá řešení,*

(2) $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x_0) \neq 0$ *ve všech bodech intervalu* J,

(3) $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x_0) \neq 0$ *v nějakém bodě intervalu* J.

Obdobně pro Wronskiány úlohy $(\tilde{L})$.

Důkaz: Provedeme pro změnu pro $(\tilde{L})$:

(1)⇒(2): Nechť (2) neplatí, nechť

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), & \ldots, & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0), & \ldots, & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Potom existuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ netriviální řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y_1(x_0)\alpha_1 + \cdots + y_n(x_0)\alpha_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\alpha_1 + \cdots + y_n^{(n-1)}(x_0)\alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

Položíme-li $y = \sum \alpha_i y_i$, máme speciálně $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Takové řešení úlohy ($\tilde{L}-$hom) ale již známe, totiž $const_0$. Z jednoznačnosti tedy dostáváme $\sum \alpha_i y_i = const_0$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou tedy závislé.

(2)⇒(3) je triviální a (3)⇒(1) (totiž, non(3) ⇒ non(2)) také.

□

XIX.3 Metoda variace konstant

Jde o metodu, která umožňuje nalézt řešení soustavy (L) resp. $(\tilde{L})$, máme-li již nalezenou bázi řešení soustavy ($L-$hom) resp. rovnice ($\tilde{L}-$hom). Třebaže druhá je speciální případ první úlohy, předvedeme postup raději pro oba případy.

3.1 Soustava (L): Mějme $\vec{y_1} = (y_{11}, \ldots, y_{1n}), \vec{y_2}, \ldots, \vec{y_n}$ bázi řešení soustavy (L). Pokusíme se najít řešení ve tvaru

$$\vec{y_0}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\vec{y_i}(x)$$

(připomeňte si XVIII.5.7!). Máme

$$y_{ij}' = \sum_k a_{jk} y_{ik}$$

a tedy

$$y_{0j}' = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_i c_i y_{ij}' = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_{i,k} c_i a_{jk} y_{ik} =$$

$$= \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_k a_{jk} \sum_i c_i y_{ik} = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_k a_{jk} y_{0k}$$

a tedy jde o to, můžeme-li najít funkce $c_i(x)$ takové, aby bylo

$$\sum c_i'(x) y_{ij}(x) = b_i(x).$$

A to možné je. Vzpomeňte si na Cramerovo pravidlo: Označíme-li $W_i(x)$ funkci získanou nahrazením $i-$tého sloupce ve Wronskiánu sloupcem

$$\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

máme

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x)}$$

a jmenovatel je podle 2.5 stále nenulový. Tedy stačí položit

$$c_i = \int \frac{W_i}{W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})}.$$

3.2 Rovnice $(\tilde{L})$**:** Vezměme bázi $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Pokoušíme se najít řešení tvaru

$$y(x) = \sum c_i(x) \cdot y_i(x).$$

Platí $y_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_i y_i^{(j)} = 0$. Požadujeme-li tedy, aby

$$\sum c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0 \tag{1}$$

pro $k = 0, \ldots, n-2$, budeme dostávat

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum c_i(x) y_i'(x), \\ &\vdots \\ y^{(k-1)}(x) &= \sum c_i(x) y_i^{(k-1)}(x). \end{aligned}$$

Přidejme požadavek

$$\sum c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x). \tag{2}$$

Potom bude

$$y^{(n)}(x) = \sum c_i(x) y_i^{(n)}(x) + b(x)$$

a máme

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = b(x).$$

Podmínky (1) a (2), které jsme na c_i' položili vedou opět k řešitelné algebraické soustavě, neboť determinant levé strany je příslušný, stále nenulový, Wronskián.

XIX.4 Lineární rovnice s konstantními koeficienty.

4.1 V tomto odstavci se budeme zabývat tím případem úloh (L) a $(\tilde{L})$, kde funkce a_{ij} resp. a_i jsou konstanty, a popíšeme postup jak získat úplný systém řešení. Vzhledem k tomu, co již víme z předchozího, bude stačit zabývat se úlohami $(L-\text{hom})$ a $(\tilde{L}-\text{hom})$. Jedno potřebné řešení rovnic s pravou stranou, je-li tato nenulová, získáme třeba metodou variace konstant. V některých konkrétních případech je ostatně možno užít jednoduššího postupu, o čemž si na závěr také něco řekneme.

Podrobněji se budeme zabývat případem $(\tilde{L})$ — jednou lineární rovnicí $n-$tého řádu. S tím se student asi bude v praxi setkávat častěji. Případ n rovnic prvního řádu je analogický, i když technicky náročnější. V tom půjdeme tak daleko, aby již bylo z analogie patrno, jak se dokončí detaily.

4.2 Charakteristický polynom: Mějme dánu úlohu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

kde a_j jsou konstanty.

Víme, že k tomu, abychom měli úplný systém řešení, je potřeba najít n lineárně nezávislých řešení. Zkusíme je najít ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Pro tuto funkci platí

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$

a tedy dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0.$$

Jelikož $e^{\lambda x}$ je vždy nenulové, rovnosti dosáhneme právě když

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Polynom p se nazývá *charakteristický polynom* úlohy (1).

Vidíme, že *je-li λ kořenem charakteristického polynomu, $y(x) = e^{\lambda x}$ řeší úlohu* (1).

4.3 V případě, že $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou různá čísla, $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ tvoří nezávislý systém. Dokažte to jako cvičení (vypočtěte Wronského determinant a vzpomeňte si na Vandermondův determinant z X.2.9). Jelikož s tímto ale vždy nevystačíme, dokážeme si trochu silnější

Lemma: *Buďte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ různá komplexní čísla, $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ polynomy. Je-li*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x) \cdot e^{\lambda_j x}$$

identicky nulová funkce, jsou všechny polynomy p_j nulové.

Důkaz: Nechť tomu tak není. Potom existuje protipříklad. Mezi protipříklady vybereme takový, že

(a) maximální ze stupňů $p_j(x)$ je nejmenší možný, a

(b) počet polynomů $p_j(x)$ s tímto maximální stupněm je nejmenší možný.

(Přitom chápeme jako stupeň konstantního nenulového polynomu jako 0, u konstantního nulového polynomu -1. Máme-li tedy polynom nezáporný stupeň, derivováním se tento stupeň sníží o 1.)

Máme identicky

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0 \tag{1}$$

Zderivováním této rovnice dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} p_j'(x)e^{\lambda_j x} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0. \tag{2}$$

Dejme tomu, že $p_1(x)$ má maximální stupeň. Odečteme rovnici (1) vynásobenou λ_1 od rovnice (2). Dostaneme

$$p_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=2}^{n}((\lambda_j - \lambda_1)p_j(x) + p_j'(x))e^{\lambda_j x} = 0 \tag{3}$$

Stupeň polynomu u $e^{\lambda_1 x}$ se snížil, stupeň polynomů u ostatních $e^{\lambda_j x}$ se nezvýšily. Podle volby našeho protipříkladu (podmínky (a) a (b)) a vzhledem k tomu, že jsme u $e^{\lambda_1 x}$ předpokládali maximální stupeň, (3) již protipříkladem být nesmí a musí tedy být

$$p_1'(x) = 0 \quad a$$
$$(\lambda_j - \lambda_1)p_j(x) + p_j'(x) = 0 \qquad \text{pro } j > 1.$$

Jelikož $\lambda_j \neq \lambda_1$, plyne z druhé rovnice okamžitě, že $p_j = 0$ pro $j > 1$. O p_1 z první rovnice víme jen to, že je konstantní, ale $C \cdot e^{\lambda_1 x} = 0$ jen když $C = 0$. $\square$

4.4 Důsledek: *Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá čísla. Potom systém*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{s_2}e^{\lambda_2 x}, \dots$$
$$\dots \quad \dots, e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \dots, x^{s_k}e^{\lambda_k x}$$

je při libovolné volbě nezáporných celých čísel $s_1, \dots, s_k$ nezávislý.

4.5 Nejjednodušší případ: Nechť charakteristický polynom má n různých reálných kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom podle 4.2 a 4.4 máme bázi úplné soustavy řešení

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

Problém je tedy v tom, co máme dělat s komplexními kořeny a jak se vyrovnáme s případnou netriviální násobností některých kořenů.

4.6 Komplexní kořeny: Jelikož se zabýváme diferenciálními rovnicemi v reálném oboru, charakteristický polynom má reálné koeficienty a tedy ke každému kořenu je též číslo komplexně sdružené kořenem. Jelikož tedy kořen

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$$

není reálný, máme pro nějaké $k \neq j$

$$\lambda_k = \alpha_j - i\beta_j.$$

(Komplexní) funkce $e^{\lambda_j x}$ a $e^{\lambda_k x}$ v naší bázi nahradíme (reálnými) funkcemi

$$e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \qquad \text{a} \qquad e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

(Kde se to vzalo bude patrno v kapitole o komplexní analýze. Souvisí to s tím, že e^{ix} i e^{-ix} se dají napsat jako lineární kombinace funkcí $\sin x$ a $\cos x$, a že naopak $\sin x$ a $\cos x$ se dají napsat jako lineární kombinace funkcí e^{ix} a e^{-ix}.)

4.7 Násobné kořeny: Označme

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}.$$

Budeme nyní $\mathcal{L}$ aplikovat na funkce $y(x,\lambda)$, které kromě proměnné x ještě závisí na parametru λ. Potom máme

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} y + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial x^j} y.$$

Podle XIII.4.2 máme

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L}(y) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial^n}{\partial x^n} y + \cdots = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial \lambda} y + \cdots = \mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)$$

a obecněji

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} y\right).$$

Speciálně pro $y(x,\lambda) = e^{\lambda x}$ máme (viz 4.2)

$$\mathcal{L}(y) = e^{\lambda x} \cdot p(\lambda).$$

Tedy

$$\mathcal{L}(x^k e^{\lambda x}) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} y\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda x} \cdot p(\lambda)).$$

Indukcí snadno zjistíme, že

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda x} \cdot p(\lambda)) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} p^{(j)}(\lambda) \cdot x^{k-j} e^{\lambda x}.$$

Je-li λ k-násobný kořen polynomu p, je též

$$p'(\lambda) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0$$

a tedy rovnici $\mathcal{L}(y) = 0$ splňuje kromě $e^{\lambda x}$ též

$$x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Tedy za k-násobný kořen dostaneme k funkcí; podle 4.4 je takto získaný systém nezávislý a jelikož sestává z n funkcí, je to base, kterou jsme potřebovali.

Za sdruženou dvojici komplexních kořenů $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ stupně k bereme ovšem

$$\begin{array}{lcl} e^{\alpha x}\sin\beta x, x e^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots & , x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x, \\ e^{\alpha x}\cos\beta x, x e^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots & , x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x. \end{array}$$

4.8 Systém n rovnic: Uvažujme úlohu

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

s konstantními a_{ij}. Zkoumejme, zda má řešení tvaru

$$y_i = c_i \cdot e^{\lambda x}. \tag{1}$$

Pro takové řešení by muselo být

$$\lambda c_i \cdot e^{\lambda x} = \sum a_{ij} c_j e^{\lambda x}$$

a po vydělení (nenulovým) $e^{\lambda x}$ dostáváme podmínku

$$\lambda c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{2}$$

jejíž splnění zřejmě stačí k tomu, aby (1) bylo řešením.

Trochu terminologie: číslo λ takové, že existuje nenulový vektor $(c_1, \dots, c_n)$ splňující (2) se nazývá *vlastní číslo* matice (a_{ij}), ty netriviální vektory $(c_1, \dots, c_n)$ se pak nazývají *vlastní vektory.* Jde tedy o to najít vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = (a_{ij})$. Označíme-li E jednotkovou matici, jde nám o netriviální $\vec{c}$ takové, že

$$\lambda E \vec{c}^{\,T} = A \vec{c}^{\,T},$$

což můžeme přepsat na

$$(A - \lambda E)\vec{c}^{\,T} = \vec{o}^{\,T}.$$

Kdy má takováto soustava rovnic netriviální řešení? Právě když její matice není regulární, t.j. když

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Snadno vidíme, že jsme podobně jako v 4.2 dostali polynom $n-$tého řádu a že řešení mají co dělat s jeho kořeny. Tentokrát je situace komplikovanější. Nejen proto, že vůbec sestavení našeho polynomu dá víc práce. Máme-li kořen nalezen, úloha zdaleka neskončila. Musíme ještě hledat vektor nebo vektory s ním spojené. To ovšem není těžké, řešit algebraické lineární rovnice umíme. Komplikace je však ještě v něčem dalším: násobnost kořenů se může projevit dvěma způsoby. Hodnost matice $A - \lambda E$ může klesnou až o její násobnost. Potom máme dostatečně mnoho nezávislých vlastních vektorů s tímto λ spojených a tyto vlastní vektory nám dají dostatečně mnoho řešení typu (1). Hodnost ale může klesnou o méně a potom přichází na řadu řešení podobné řešením ze 4.7. Nepůjdeme do podrobností; raději si budeme situaci ilustrovat na třech příkladech:

$$(A) \quad \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 \\ y_2' &=& y_2 \\ y_3' &=& y_3 \end{array} \qquad (B) \quad \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 \\ y_2' &=& y_1 + y_2 \\ y_3' &=& y_2 + y_3 \end{array} \qquad (C) \quad \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 \\ y_2' &=& y_2 \\ y_3' &=& y_2 + y_3 \end{array} \quad .$$

Ve všech třech případech máme trojnásobný kořen 1. V případě (A) klesne hodnost ze 3 na 0 a situace je jednoduchá: máme tři nezávislé vlastní vektory, třeba $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ a to nám dá nezávislá řešení

$$(e^x, 0, 0), (0, e^x, 0), (0, 0, e^x).$$

Naopak v případě (B) klesne hodnost jen o 1 a přímo dostaneme jen řešení $(0, 0, e^x)$. Další řešení pak jsou, v jakési analogii s 4.7, třeba $(0, e^x, xe^x)$ a $(2e^x, 2xe^x, x^2 e^x)$.

Případ (C) je smíšeného charakteru. Hodnost klesne o 2 a „základní" řešení dostaneme dvě. Třeba $(e^x, 0, 0)$ a $(0, 0, e^x)$. Ta potom doplníme (např.) řešením $(0, e^x, xe^x)$.

Zatím co se otázka násobnosti jak vidíme proti případu jedné rovnice $n-$tého řádu zkomplikovala, s komplexními kořeny se můžeme vypořádat zcela analogicky jako dříve: $e^{-i\beta x}$ a $e^{i\beta x}$ nahradíme $\sin \beta x$ a $\cos \beta x$.

4.9 Speciální pravé strany: Zase se vrátíme k jedné rovnici $n-$tého řádu. Jsou-li pravé strany polynomy, nebo $e^{\alpha x}, \sin \alpha x$ nebo $\cos \alpha x$, je možno řešení najít mezi funkcemi stejného charakteru. Za předpokladu, že taková pravá strana není sama řešením příslušné homogenní rovnice, je možno hledat řešení

- v prvním případě mezi polynomy stejného stupně,
- v druhém případě ve tvaru $C \cdot e^{\alpha x}$ (snadno zjistíme, že dostaneme $C = \frac{1}{p(\alpha)}$, kde p je charakteristický polynom),
- ve třetím a čtvrtém případě jako kombinaci $C \sin \alpha x + D \cos \alpha x$.

Je-li pravá strana řešením homogenní rovnice spojené s kořenem násobnosti k, hledejte řešení mezi uvedenými funkcemi, ale vynásobenými ještě x^k (jako bychom v metodě z 4.7 postoupili ještě o jeden krok).

Není asi nutné dodávat, že je možné takováto řešení kombinovat. Máme-li řešení y_i rovnice $\mathcal{L}(y) = b_i(x)$, řeší $\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x)$ rovnici

$$\mathcal{L}(y) = \gamma_1 b_1(x) + \gamma_2 b_2(x).$$

Možná, že stojí za to ujasnit si rozdíl mezi případem pravé strany, která je či není řešením příslušné homogenní rovnice na následujícím případě, který má dost jasnou fysikální interpretaci. Rovnice

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

popisuje kmity nějakého systému, kterému není nic vnucováno zvenčí. Tomu odpovídají řešení $a \cos \omega x + b \sin \omega x$. Dejme tomu, že začneme zvenčí vnucovat kmity jiné frekvence α, což vyjadřujeme pravou stranou $\sin \alpha x$. Pro rovnici $y'' + \omega^2 y = \sin \alpha x$ zkusme řešení $A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$. Po zderivování dostaneme

$$-A\alpha^2 \sin \alpha x - B\alpha^2 \cos \alpha x + A\omega^2 \sin \alpha x + B\omega^2 \cos \alpha x = \sin \alpha x$$

čemuž vyhovíme, bude-li $A(\omega^2 - \alpha^2) = 1$ a $B(\omega^2 - \alpha^2) = 0$, tedy

$$B = 0 \qquad \text{a} \qquad A = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Kmity systému se tedy ustálí na

$$\frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \sin \alpha x + a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Vidíme, že čím je frekvence vnuceného kmitání bližší, tím bude větší amplituda vynuceného kmitání (aniž bychom přímo amplitudu zvyšovali zvenčí). Budeme-li ale vnucovat kmity v přirozené amplitudě soustavy, dojde k resonanci, což se projeví v řešení typu $x \sin \omega x$, kde amplituda neomezeně poroste.

XX Vícerozměrný integrál

Cílem této kapitoly je dosti jednoduché rozšíření Riemannova integrálu z kapitoly XV na funkce více proměnných. Zatím půjde jen o speciální případ funkcí definovaných na vícerozměrných intervalech (kvádrech). Nebudeme tedy ještě umět integrovat ani přes tak jednoduché obory, jako je třeba kruh v dvojrozměrném případě. To se napraví v další kapitole, kde se dovíme o integrování „libovolných rozumných“ funkcí přes „libovolné rozumné“ obory.

XX.1 Riemannův integrál na vícerozměrném intervalu.

1.1 (Kompaktním) *intervalem* v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n rozumíme součin

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle,$$

kde $\langle a_i, b_i\rangle$ jsou kompaktní intervaly v $\mathbb{R}$.

Rozdělením D takového intervalu J rozumíme $n-$tici $D_1, \dots, D_n$, kde D_i je rozdělení intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$ ve smyslu z XV.2.1. Rozdělení $D = (D_1, \dots, D_n)$ je *zjemnění* rozdělení $D' = (D'_1, \dots, D'_n)$ jestliže D_i zjemňuje D'_i opět ve smyslu z XV.2.1, a stejně jako tam máme

Pozorování: *Každá dvě rozdělení mají společní zjemnění.*

Abychom trochu zkrátili zápisy, zavedeme ještě pojem *členu* rozdělení $D = (D_1, \dots, D_n)$. Je to kterýkoli interval $K = \langle t_{1i_1}, t_{1i_1+1}\rangle \times \ldots \times \langle t_{ni_n}, t_{ni_n+1}\rangle$, kde $D_k : t_{k0} < \cdots < t_{k,r(k)}, \quad 0 \le i_j \le r(j)$. Množina všech členů podrozdělení D bude označována $|D|$.

Objem intervalu $J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$ je číslo

$$\operatorname{vol} J = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

1.2 Buď f omezená funkce na intervalu J, buď D rozdělení J. *Dolní* (resp. *horní*) *sumou* funkce f v rozdělení D rozumíme číslo

$$s(f, D) = \sum_{K\in|D|} m_K \cdot \operatorname{vol} K \qquad \text{resp.} \qquad S(f, D) = \sum_{K\in|D|} M_K \cdot \operatorname{vol} K,$$

kde m_K je infimum a M_K maximum funkce f na intervalu K.

Uvědomte si, že v dimenzi 1 se jedná přesně o totéž jako v XV.2.2 a že geometrická interpretace jako dolní a horní aproximace objemu útvaru pod grafem funkce f je zcela obdobné tomu, co bylo diskutováno v XV.1.

Zcela obdobně jako v XV.2.4 dostaneme

Tvrzení: *Pro libovolná dvě rozdělení D a D' platí $s(f,D) \le S(f,D')$*

a definujeme dolní a horní Riemannův integrál

$$\underline{\int_J} f = \sup_D s(f,D), \qquad \overline{\int_J} f = \inf_D S(f,D)$$

a při rovnosti těchto hodnot mluvíme o Riemannově integrálu a píšeme prostě

$$\int_J f$$

nebo, podobně jako v kapitole XV,

$$\int_J f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots x_n, \qquad \int_J f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

1.3 Prakticky doslovným opakováním důkazu z XV.3.1 se opět získá

Věta: *Jsou-li f,g Riemannovsky integrovatelné na J a α,β reálná čísla, je $\alpha f+\beta g$ Riemannovsky integrovatelná a platí*

$$\int_J(\alpha f+\beta g) = \alpha\int_J f + \beta\int_J g.$$

XX.2 Existence integrálu ze spojité funkce.

2.1 Rovněž pro následující tvrzení nepotřebujeme na úvahách z XV.2.6 nic měnit.

Věta: *Funkce f je Riemannovsky integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení D takové, že*

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

2.2 Věta: *Spojitá funkce na intervalu J je Riemannovsky integrovatelná.*

Důkaz: Ani zde není nic nového proti příslušnému důkazu z kapitoly XV. Důkaz ale provedeme, abychom si zvykli na pozměněnou situaci.

Podle XII.5.10 (a ovšem XII.5.6) je f stejnoměrně spojitá. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme δ tak, aby

$$\varrho(\vec{x},\vec{y}) < \delta = |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}.$$

Zvolme rozdělení D tak jemné, aby

$$\forall K \in |D|, \vec{x},\vec{y} \in K \Rightarrow \varrho(\vec{x},\vec{y}) < \delta$$

(že to jde je zřejmé; zvlášť snadno je to vidět, pracujeme-li v E_n s metrikou $\varrho((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max_i |x_i - y_i|$). Tedy pro M_K a m_K z 1.2 máme $M_K - m_K < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}$ a jelikož zřejmě

$$\sum_{K\in|D|} \operatorname{vol} K = \operatorname{vol} J,$$

máme

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{K\in|D|}(M_K - m_K)\operatorname{vol} K \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}\cdot\sum_{K\in|D|}\operatorname{vol} K = \varepsilon.$$

□

2.3 Zcela bezprostřední je

VĚTA:

1. *$\left|\int_J f\right| \le \int_J |f|$ (existují-li příslušné integrály).*
2. *Buďte f, g Riemannovsky integrovatelné funkce na J, buď $f \le g$. Potom $\int_J f \le \int_J g$.*
3. *Speciálně, je-li $f(\vec{x}) \le C$ pro nějakou konstantu C, platí*

$$\int_J f \le C \cdot \operatorname{vol} J.$$

XX.3 Fubiniova věta.

Teprve v tomto odstavci se dostáváme opravdu k něčemu opravdu novému.

3.1 VĚTA: *Buďte $J' \subseteq E_n, J'' \subseteq E_m$ intervaly, $J = J' \times J''$, buď f spojitá funkce definovaná na J. Potom*

$$\int_J f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\vec{y} = \int_{J'}\left(\int_{J''} f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}\right)\,d\vec{x} = \int_{J''}\left(\int_{J'} f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\right)\,d\vec{y}.$$

Důkaz: Dokážeme třeba první rovnost, druhá je zcela obdobná. Označme $F(\vec{x}) = \int_{J''} f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}$. Máme dokázat, že

$$\int_J f = \int_{J'} F.$$

Zvolme rozdělení D intervalu J takové, aby již bylo

$$\int f - \varepsilon \le s(f,D) \le S(f,D) \le \int f - \varepsilon.$$

Rozdělení D intervalu $J = J' \times J''$ je sestaveno z nějakých rozdělení D' intervalu J' a D'' intervalu J''. Při tom je

$$|D| = \{K' \times K'' | K' \in |D'|, K'' \in |D''|\}$$

a každý člen D se objeví ve tvaru $K' \times K''$ právě jednou. Máme

$$F(\vec{x}) \le \sum_{K'' \in |D''|} \max\nolimits_{\vec{y} \in K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K''$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F,D') &\le \sum_{K' \in |D'|} \max\nolimits_{\vec{x} \in K''}\left(\sum_{K'' \in |D''|} \max\nolimits_{\vec{y} \in K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K''\right) \cdot \operatorname{vol} K' \le \\ &\le \sum_{K' \in |D'|}\sum_{K'' \in |D''|} \max\nolimits_{(\vec{x},\vec{y}) \in K' \times K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K'' \cdot \operatorname{vol} K' = \\ &= \sum_{K' \times K'' \in |D|} \max\nolimits_{\vec{z} \in K' \times K''} f(\vec{z}) \cdot \operatorname{vol}(K' \times K'') = S(f,D) \end{aligned}$$

a obdobně

$$s(f,D) \le s(F,D').$$

Máme tedy

$$\int_J f - \varepsilon \le s(F,D') \le \underline{\int}_{J'} F \le \overline{\int}_{J'} F \le S(F,D) \le \int_J f + \varepsilon$$

a tedy $\int_{J'} F$ existuje a je roven $\int_J f$. $\square$

POZNÁMKA: *Jde ovšem o tu rovnost. Existence integrálu F plyne z toho, že F je spojitá, což se snadno ukáže na základě stejnoměrné spojitosti funkce f a 2.3.3.*

XX.4 Diniho věta a její důsledek.

4.1 VĚTA: *Nechť f_n jsou spojité na intervalu J, nechť f_n stejnoměrně konvergují k funkci f. Potom platí*

$$\int_J f = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n$$

Důkaz: Bude zcela obdobný důkazu XV.7.1, vlastně snazší, ale provedeme ho.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu n_0 takové, aby pro $n \geq n_0$ bylo

$$|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}.$$

Označme m_K, M_K jako v 1.2, pro f_n označme příslušné hodnoty m_K^n, M_K^n. Je tedy

$$|m_K - m_K^n|, |M_K - M_K^n| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}$$

a odtud

$$|s(f,D) - s(f_n,D)| \leq \sum_{K\in|D|} |m_K - m_K^n| \cdot \operatorname{vol} K < \varepsilon$$

(opět užíváme toho, že $\sum_{K\in|D|} \operatorname{vol} K = \operatorname{vol} J$) a obdobně

$$|S(f,D) - S(f_n,D)| < \varepsilon.$$

Zvolme nyní rozdělení D tak jemné, aby

$$\int_J f - \varepsilon \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq \int_J f + \varepsilon.$$

Potom

$$\int_J f - 2\varepsilon \leq s(f,D) - \varepsilon \leq s(f_n,D) \leq \int_J f_n \leq$$

$$\leq S(f_n,D) \leq S(f,D) + \varepsilon \leq \int_J f + 2\varepsilon.$$

Tedy $\lim \int_J f_n = \int f_n$. $\square$

4.2 OZNAČENÍ: *Nechť f_n jsou reálné funkce na nějaké množině X. Budeme psát $f_n \nearrow f$ resp. $f_n \searrow f$ jestliže pro všechna x je $(f_n(x))_n$ neklesající resp. nerostoucí posloupnost a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*

4.3 VĚTA: *(Diniho věta) Nechť f_n jsou spojité reálné funkce na kompaktním prostoru X. Nechť $f_n \searrow 0$. Potom f_n konvergují stejnoměrně.*

Důkaz: Jelikož se jedná o spojité funkce na kompaktním prostoru, každá z nich nabývá maxima, dejme tomu f_n v bodě x_n. Zřejmě stačí dokázat, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

Nechť existuje protipříklad. Potom existuje i protipříklad takový, že

1. $\forall n, f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$ pro nějaké pevné $\varepsilon_0 > 0$, a
2. x_n konvergují k nějakému bodu $x \in X$.

(Z prvního daného protipříkladu — takového, že není $\lim f_n(x_n) = 0$ — můžeme vybrat menší systém f_n aby (1) již platilo. Potom znovu použijeme kompaktnosti: vybereme podposloupnost posloupnosti x_n, která konverguje, a přebytečné funkce f_n opět vyškrtáme.) Nyní ale pro $k \geq n$ máme

$$f_n(x_k) \geq f_k(x_k) \geq \varepsilon_0$$

a tedy $f_n(x) = f_n(\lim_k x_k) = \lim_k f_n(x_k) \geq \varepsilon_0$, což je spor, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. $\square$

4.4 Z vět 4.1 a 4.3 dostáváme okamžitě

DŮSLEDEK: *Nechť f_n jsou spojité funkce na intervalu J, nechť $f_n \searrow 0$. Potom* $\lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$.

XXI Lebesgueův integrál

XXI.1 Limita za integračním znamením.

1.1 V této kapitole si proti předchozím značně rozšíříme možnosti integrování. Nadto získáme integrál, se kterým se mnohem bezstarostněji počítá než s integrálem Riemannovým: Podmínky, za kterých bude možno provádět úpravy budou velmi přehledné a snadno ověřitelné.

1.2 Klíčovým momentem bude otázka přechodu s limitou za integrační znamení, t.j. otázka, zda a kdy platí

$$\int_J \lim_n f_n = \lim_n \int_J f_n. \tag{$*$}$$

To má dalekosáhlý význam. Nejde jen o formuli $(*)$ jako kalkulační pravidlo. Kromě toho (a možná především) $\lim_n f_n$ může být funkce složitější než funkce f_n a zjistíme-li, že rovnost $(*)$ platí (nebo je vůbec přípustné — co tím myslím bude patrno z následujícího), můžeme počítat (nebo dokonce, nebude-li dosavadními prostředky definován, dodefinovat) integrál z té složitější funkce jako limitu příslušné posloupnosti čísel.

1.3 PŘÍKLADY:

1. *Dirichletova funkce:* Riemannův integrál z funkce f nabývající hodnoty 1 v racionálních bodech a 0 v iracionálních bodech samozřejmě neexistuje. Seřaďme racionální body do posloupnosti

   $$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

   definujme množiny

   $$M_{kn} = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \left\langle r_j - \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2^j} \right\rangle \right) \cap \langle 0,1\rangle$$

   a položme

   $$f_{kn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \in M_{kn} \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

   Zřejmě Riemannův integrál $\int_0^1 f_{kn}$ existuje a platí

   $$\int_0^1 f_{kn} < \frac{2}{k} \qquad \text{pro všechna } n.$$

   Představme si, že bychom mohli volně užívat $(*)$. Položme $f_k = \lim f_{kn}$. Dostáváme

   $$\int_0^1 f_k \le \frac{2}{k}$$

a jelikož zřejmě platí $0 \leq f \leq f_k$, zjistíme novým limitním přechodem podle k, že $\int_0^1 f = 0$, což celkem odpovídá intuici: f je nenulové v nepodstatně mnoha bodech.

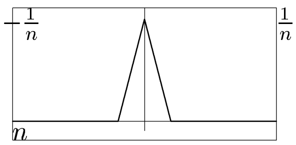
2. *Obecnější obor, přes něj by bylo možno integrovat vícerozměrným integrálem:* Buď A libovolná omezená uzavřená podmnožina v E_n, f spojitá funkce definována na A. Tu obecně zatím neumíme Riemannovsky integrovat. Položme $B_n = \{x \mid \varrho(x, A) \geq \frac{1}{n}\}$. Podle XVII.2.3 můžeme f rozšířit na spojitou funkci f_n dodefinovanou na A jako f a na B_n hodnotami 0. Tu ovšem není problém přes dost velký kvádr integrovat. Přitom $\lim f_n$ je funkce definovaná stejně jako na A a nulová jinde, takže její integrál by byl dobrá definice integrálu z f přes A.

1.4 Rovnost $(*)$ již známe za předpokladu stejnosměrné spojitosti. To může být užitečné v některých výpočtech (a i v teorii se nám to bude hodit), ale pro účely o kterých jsme převážně mluvili, nám to moc nepomůže. Stejnosměrná limita zachovává spojitost. To je většinou výhoda, ale teď zrovna ne: My se spíš potřebujeme dostat z mezí spojitosti.

1.5 Obecně $(*)$ určitě nemůže platit: Na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ definujme funkce f_n takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \leq -\frac{1}{n} \\ n + n^2x \text{ pro } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n - n^2x \text{ pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ pro } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(viz obrázek)



Zřejmě je $\int_{-1}^1 f_n = 1$ pro každé n. Dále definujme $g_n(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $g_n(0) = n$. Nyní máme $\int_{-1}^1 g_n = 0$ pro každé n. Jenomže $\lim f_n = \lim g_n$ a tak $(*)$ nemůže platit.

Tento příklad mohl přinést jakési zklamání. Časem ale uvidíme, co se stalo. Z kritérií v §5 bude posloupnost f_n na první pohled podezřelá, o funkcích g_n však zjistíme, že konvergují vhodným způsobem. Ta kritéria nás totiž ujistí, že jakmile f_n konvergují monotónně, nebo jsou rozumně omezené, $(*)$ platí. U naší posloupnosti f_n není splněno ani jedno ani druhé, g_n konvergují monotónně.

1.6 Integrál, který v této kapitole získáme je ekvivalentní s integrálem Lebesgueovým. Místo původního Lebesgueova přístupu se ale budeme držet konstrukce pocházející od P.L.Daniella.

XXI.2 První opatrné rozšíření Riemannova integrálu

2.1 Úmluvy: V této kapitole budeme slovem *funkce* mínit vždy funkci na E_n nabývající hodnot v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Spojitá funkce s kompaktním nosičem je spojitá reálná funkce taková, že $f(x) = 0$ až na nějakou omezenou množinu. Množinu těchto funkcí budeme označovat (bude-li později potřeba objasnit o které E_n se jedná, uděláme to; zatím to potřeba není).

Pro funkce $f \in Z$ je zřejmým způsobem možno definovat integrál (vezmeme-li libovolný interval obsahující nosič, bude příslušný Riemannův integrál stejný). Jeho hodnotu označíme

$$\mathcal{I}f.$$

Pro funkce f, g definujeme zřejmým způsobem $\max(f,g), \min(f,g)$. Definujeme dále *kladnou* a *zápornou* část funkce f, totiž

$$f^+ = \max(f,0), \quad f^- = -\min(f,0).$$

POZOROVÁNÍ:

1. $f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$

2. $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|).$

2.2 Základní vlastnosti: Pro obor Z platí

(A) $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f,g \in Z \Rightarrow \alpha f + \beta g \in Z,$

(B) $f \in Z \Rightarrow |f| \in Z.$

Pro zobrazení $\mathcal{I} : Z \to \mathbb{R}$ platí

(I) $f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{I}f \geq 0,$

(II) $\mathcal{I}$ je lineární zobrazení,

(III) $Z_n \in Z, f_n \searrow 0 \Rightarrow \mathcal{I}f_n \to 0$ (připomeňte si XX.4.4).

2.3 POZNÁMKY:

1. Pro funkce na množinách funkcí se často užívá termín *funkcionál.* O cestě, kterou budeme postupovat se často mluví jako o *metodě rozšiřování funkcionálu.*

2. Metoda má mnohem obecnější platnost. Proto budeme dbát na to, abychom v této kapitole kromě (A), (B), (I), (II) a (III) již žádných dalších specifických vlastností spojitých funkcí s kompaktním nosičem ani Riemannova integrálu nepoužívali.

2.4 Z vlastností 2.2 a pozorování v 2.1 okamžitě dostáváme:

$$\begin{aligned} f \leq g \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{I}f \leq \mathcal{I}g, \\ f,g \in Z \quad &\Rightarrow \quad \max(f,g), \min(f,g), f^+, f^- \in Z. \end{aligned}$$

2.5 Obory Z^R a Z^K: Definujme

$$\begin{aligned} Z^R &= \{f \mid \exists f_n \in Z, f_n \nearrow f\}, \\ Z^K &= \{f \mid \exists f_n \in Z, f_n \searrow f\}, \\ Z^* &= Z^R \cup Z^K. \end{aligned}$$

(Funkce ze Z^* tedy již mohou nabývat nekonečných hodnot.) Všimněte si, že $Z \subseteq Z^R \cap Z^K$, rovnost ale platit nemusí.

2.6 VĚTA: *Buďte $f, g \in Z^*, f \leq g$, buďte $f_n, g_n \in Z$ funkce, které o tom svědčí. Potom*

$$\lim \mathcal{I} f_n \leq \lim \mathcal{I} g_n.$$

(Připouštíme nekonečné hodnoty, takže o existenci těchto limit není pochyb.)

Důkaz: (a) Nechť $f_n \nearrow f, g_n \searrow g$. Potom $f_n \leq f \leq g \leq g_n$ a $\mathcal{I} f_n \leq \mathcal{I} g_n$.

(b) $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$. Zvolme pevné k a definujme

$$h_n = \min(g_n, f_k).$$

h_n zřejmě neklesá a máme

$$\lim h_n(x) = \min(g(x), f_k(x)) = f_k(x),$$

takže

$$h_n \overset{n}{\nearrow} f_k \quad \text{a} \quad f_k - h_n \overset{n}{\searrow} 0$$

a tedy podle (III) máme $\mathcal{I} h_n \overset{n}{\to} \mathcal{I} f_k$. Jelikož $g_n \geq h_n$, máme $\mathcal{I} g_n \geq \mathcal{I} h_n$ a tedy

$$\lim_n \mathcal{I} g_n \geq \mathcal{I} f_k$$

pro každé k a tedy též $\lim_n \mathcal{I} g_n \geq \lim_k \mathcal{I} f_k$.

(c) $f_n \searrow f, g_n \searrow g$: použijme (b) na $-f_n, -f, -g, -g_n$.

(d) $f_n \searrow f, g_n \nearrow g$: Potom $f_n - g_n \leq h_n = (f_n - g_n)^+$.
Jelikož $h_n \searrow 0$, máme $\lim \mathcal{I} h_n = 0$ a konečně

$$\lim \mathcal{I} f_n - \lim \mathcal{I} g_n = \lim \mathcal{I}(f_n - g_n) \leq 0.$$

□

2.7 DŮSLEDEK A DEFINICE: *Pro $f \in Z^*$ můžeme definovat*

$$\mathcal{I} f = \lim_n \mathcal{I} f_n,$$

kde f_n je libovolná posloupnost funkcí ze Z, konvergují monotónně k f.

2.8 Několik bezprostředních fakt (pozor na to, kde mluvíme o Z^* a kde o Z^R resp. Z^K!):

(a) $f \in Z^R \Leftrightarrow -f \in Z^K$,

(b) $f, g \in Z^R$ resp. $Z^K \Rightarrow f + g \in Z^R$ resp. Z^K a platí $\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I} f + \mathcal{I} g$,

(c) $f \in Z^R, \alpha \geq 0$ (resp. $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow \alpha f \in Z^R$ (resp. $\in Z^K$) a platí $\mathcal{I}(\alpha f) = \alpha \mathcal{I} f$,

(d) $f, g \in Z^*, f \leq g \Rightarrow \mathcal{I} f \leq \mathcal{I} g$,

(e) $f, g \in Z^R \Rightarrow \max(f, g), \min(f, g) \in Z^R$.

2.9 VĚTA: *Buďte $f_n \in Z^R$, buď $f_n \nearrow f$. Potom je $f \in Z^R$ a $\mathcal{I} f_n \to \mathcal{I} f$. Obdobně pro $f_n \in Z^K$ a $f_n \searrow f$.*

Důkaz: Zvolme $f_{nk} \in Z$ tak, aby $f_{nk} \overset{k}{\nearrow} f_n$ a položme

$$g_n = \max(f_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

Potom g_n neklesá. Položme $g = \lim g_n$. Jelikož

$$g_n(x) = f_{ij}(x) \le f_i(x) \quad \text{pro nějaké } i, j \le n, \tag{1}$$

máme

$$g_n \le f_n \le f \tag{2}$$

Na druhé straně, pro $k \ge n$ je $g_k \ge f_{nk}$ a tedy

$$g \ge f_n. \tag{3}$$

Z (2) a (3) zjišťujeme, že $g_n \nearrow f$. Z (3) je dále patrno, že $\mathcal{I}f \ge \lim \mathcal{I}f_n$. Na druhé straně podle (2) máme $\mathcal{I}f = \lim \mathcal{I}g_n \le \lim \mathcal{I}f_n$. $\square$

XXI.3 Definice Lebesgueova integrálu

3.1 Pro libovolnou funkci f definujme horní a dolní (Lebesgueův) integrál předpisy

$$\widetilde{\int} f = \inf\left\{\mathcal{I}g \mid g \ge f, g \in Z^R\right\}, \qquad \underset{\sim}{\int} f = \sup\left\{\mathcal{I}g \mid g \le f, g \in Z^K\right\}.$$

3.2 Tvrzení:

(1) $\widetilde{\int} f = \inf\{\mathcal{I}g \mid g \ge f, g \in Z^*\}$, $\underset{\sim}{\int} f = \sup\{\mathcal{I}g \mid g \le f, g \in Z^*\}$,

(2) $\underset{\sim}{\int} f \le \widetilde{\int} f$,

(3) $f \le g \Rightarrow \underset{\sim}{\int} f \le \underset{\sim}{\int} g$, $\widetilde{\int} f \le \widetilde{\int} g$.

Důkaz: (1) Dokážeme první rovnost. Kdyby neplatila, existovala by $g \ge f, g \in Z^K$ taková, že $\mathcal{I}g < \widetilde{\int} f$. Buďte $g_n \in Z, g_n \searrow g$. Tedy existuje k tak, že již $\mathcal{I}g_k < \widetilde{\int} f$. To je spor, protože $g_k \in Z \subseteq Z^R$.

(2) plyne z (1) a (3) je triviální.
$\square$

3.3 Z 3.2.(1) dostáváme

Důsledek: *Pro $f \in Z^*$ je $\underset{\sim}{\int} f = \widetilde{\int} f = \mathcal{I}f$.*

3.4 Definice Označme $\mathcal{L}$ množiny všech funkcí f, pro něž $\underset{\sim}{\int} f = \widetilde{\int} f$ a je to konečné číslo. Pro $f \in \mathcal{L}$ definujeme *Lebesgueův integrál*

$$\int f = \underset{\sim}{\int} f = \widetilde{\int} f.$$

Poznámka: *Požadavek konečnosti je podstatný. Je-li $\underset{\sim}{\int} f = \widetilde{\int} f$ nekonečné, může mít funkce f ještě velmi nepříjemné chování. Lebesgueovy integrály s nekonečnými hodnotami uvažovat budeme, ale pro trochu užší systém funkcí.*

3.5 Následující tvrzení je trochu obdobné větám XV.2.6 a XX.2.1.

VĚTA: *Funkce f je v $\mathcal{L}$ právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existují $g_1 \in Z^K$ a $g_2 \in Z^R$ takové, že $g_1 \leq f \leq g_2$, $\mathcal{I}g_1$ a $\mathcal{I}g_2$ jsou konečné a $\mathcal{I}g_1 - \mathcal{I}g_2 < \varepsilon$.*

Důkaz: Je-li $f \in \mathcal{L}$, druhé tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy platí druhé tvrzení. Zvolme $\varepsilon > 0$ a g_1, g_2 s požadovanými vlastnostmi. Máme

$$\mathcal{I}g_1 \leq \underset{\sim}{\int} f \leq \overset{\sim}{\int} f \leq \mathcal{I}g_2 < \mathcal{I}g_1 + \varepsilon$$

a tedy $\overset{\sim}{\int} f - \underset{\sim}{\int} f < \varepsilon$. Jelikož ε bylo libovolné, nastává rovnost. $\square$

3.6 Úmluva Funkce z $\mathcal{L}$ nemusí mít všechny hodnoty konečné. Proto se definice součtu $f + g$ funkcí z $\mathcal{L}$ může setkat s potíží: $f(x) + g(x)$ může být neurčitý výraz. Domluvíme se, že

> *je-li $f(x) + g(x)$ neurčitý výraz, nahradíme ho libovolnou hodnotou a symbolu $f + g$ budeme užívat pro takto získanou funkci.*

Výraz $f + g$ tedy může být nejednoznačný; vzápětí však uvidíme, že na těch nejednoznačných hodnotách nezáleží.

3.7 VĚTA:

(1) Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$, je $f + g \in \mathcal{L}$ a platí $\int (f + g) = \int f + \int g$.

(2) Je-li $f \in \mathcal{L}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\alpha f \in \mathcal{L}$ a platí $\int \alpha f = \alpha \int f$.

(3) Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$, je $\max(f, g) \in \mathcal{L}$ a $\min(f, g) \in \mathcal{L}$.

(4) Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$ a $f \leq g$, je $\int f \leq \int g$.

(5) Je-li $f \in \mathcal{L}$, jsou f^+ a f^- v $\mathcal{L}$.

(6) Je-li $f \in \mathcal{L}$, je $|f| \in \mathcal{L}$ a platí $|\int f| \leq \int |f|$.

Důkaz: (1) Užijme Větu 3.5. Zvolme $\varepsilon > 0$ a funkce $f_1, g_1 \in Z^K, f_2, g_2 \in Z^R$ takové, že $f_1 \leq f \leq f_2$, $g_1 \leq g \leq g_2$ a

$$\mathcal{I}f_2 - \mathcal{I}f_1 < \frac{\varepsilon}{2},\ \mathcal{I}g_2 - \mathcal{I}g_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom platí

$$f_1 + g_1 \leq f + g \leq f_2 + g_2$$

(a to i v bodech, kde jsme hodnotu volili libovolně: bylo-li třeba $f(x) = +\infty, g(x) = -\infty$, muselo být $f_2(x) = +\infty$ a $g_1(x) = -\infty$. Jelikož však f_1 nemůže být $+\infty$ — je to limita nerostoucí posloupnosti konečných čísel — a podobně $g_2(x) \neq -\infty$, máme $f_1(x) + g_1(x) = -\infty$ a $f_2(x) + g_2(x) = +\infty$. Pro $f(x)+g(x)$ tedy nerovnost nepožaduje nic.) a máme $\mathcal{I}(f_2+g_2) - \mathcal{I}(f_1+g_1) < \varepsilon$.

(2) Zcela snadno z 3.5, musíme jen rozlišit, je-li α kladné či záporné.

(3) Vezměme $\varepsilon > 0$ a funkce f_i, g_i jako v (1). Zřejmě máme

$$\max(f_1, g_1) \leq \max(f, g) \leq \max(f_2, g_2).$$

Nyní si stačí uvědomit, že

$$\max(f_2, g_2) - \max(f_1, g_1) \leq (f_2 - f_1) + (g_2 - g_1).$$

(4) je zřejmé.

(5) plyne z (3).

(6) Máme $|f| = f^+ + f^-$ a tedy

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f^+ - f^-)\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \le \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

□

3.8 Lemma: Jsou-li $f_n \in \mathcal{L}$ a platí-li $f_n \nearrow f$, pak $\lim \int f_n = \overset{\sim}{\int} f$.

Poznámky:

1. Toto lemma bude hrát v dalším velmi významnou úlohu.
2. Jelikož $\int f_n \le \underset{\sim}{\int} f$, platí pak ovšem též $\lim \int f_n = \underset{\sim}{\int} f$.

Důkaz: $\lim \int f_n \le \overset{\sim}{\int} f$ podle 3.3.(3). Kdyby $\lim \int f_n = +\infty$, rovnost by nastala triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $\lim \int f_n$ je konečná. Podle definice $\int f_n$ existují $g_n \in Z^R$ takové, že

$$\int f_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} > \mathcal{I} g_n.$$

Položme $h_n = \max(g_1, \dots, g_n)$. Potom $h_n \in Z^R$ a posloupnost h_n neklesá. Podle 2.9 je $h = \lim h_n \in Z^R$. Jelikož $h_n \ge g_n \ge f_n$, je $h \ge f$ a tedy $\mathcal{I} h \ge \overset{\sim}{\int} f$.

Důležité pozorování:

$$h_n - f_n \le (g_1 - f_1) + (g_2 - f_2) + \cdots + (g_n - f_n).$$

(V každém bodě x je jeden ze sčítanců roven $h_n(x) - f_j(x)$ pro nějaké $j \le n$. Jelikož všechny sčítance jsou nezáporné, je v případě $j = n$ všechno v pořádku; jinak máme součet napravo $\ge h_n(x) - f_j(x) + g_n(x) - f_n(x) = h_n(x) - f_n(x) + g_n(x) - f_j(x) \ge h_n(x) - f_n(x) + g_n(x) - f_n(x) \ge h_n(x) - f_n(x)$.) Tedy máme

$$\mathcal{I} h_n - \int f_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon,$$

takže $\mathcal{I} h_n \le \int f_n + \varepsilon$ a odtud $\overset{\sim}{\int} f \le \mathcal{I} h_n \le \lim \int f_n + \varepsilon$. □

3.9 Dále definujme

$$\mathcal{L}^R = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \nearrow f\},$$

$$\mathcal{L}^K = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \searrow f\},$$

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^R \cup \mathcal{L}^K.$$

3.10 Z lemmatu 3.8 okamžitě vidíme, že platí

VĚTA: *Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, je $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$.*

DŮSLEDEK: $\mathcal{L}^R \cap \mathcal{L}^K = \mathcal{L}$.

3.11 Úmluva: Pro funkce z $\mathcal{L}^*$ budeme též užívat symbolu $\int f$ pro společnou hodnotu $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$.

XXI.4 Nulové množiny

4.1 Charakteristickou funkci množiny M budeme označovat C_M. Je tedy $C_M(x) = 1$ jakmile $x \in M$, jinak $= 0$.

Tedy máme

1. $M \subseteq N \Leftrightarrow C_M \leq C_N$,
2. $C_{M\cup N} = \max(C_M, C_N)$, $C_{M\cap N} = \min(C_M, C_N)$

a je-li $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$, platí pro $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

$$C_{M_n} \nearrow C_M.$$

4.2 Množinu M nazveme *nulovou*, je-li $\tilde{\int} C_M = 0$. (Potom je samozřejmě též $\underset{\sim}{\int} C_M = 0$ a tedy $C_M \in \mathcal{L}$.)

4.3 VĚTA:

(1) Je-li $M \subseteq N$ a N nulové, je M nulová.

(2) Jsou-li M_n nulové, je $M = \bigcup^{\infty} M_n$ nulové.

Důkaz: (1) je triviální.

(2) Položme $N_n = M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Potom $C_{N_n} \nearrow C_M$ a jelikož zřejmě $C_{N_n} \leq C_{M_1} + \cdots + C_{M_n}$ a C_{N_n} jsou tedy podle 3.7 nulové, dostáváme podle 3.8 $\tilde{\int} C_M = 0$.

4.4 Úmluva: Buď $V(x)$ výrok týkající se prvků toho prostoru, nad nímž uvažujeme naše funkce. Řekneme, že V platí *skoro všude*, je-li množina

$$\{x \mid V(x) \text{ neplatí }\}$$

nulová. Zejména se často setkáváme s výrazy

$$\lim f_n(x) = f(x) \text{ skoro všude, nebo } f = g\text{skoro všude.}$$

Poslední výrok obvykle zapisujeme $f \sim g$. Uvědomte si, že relace $\sim$ je ekvivalence.
□

4.5 VĚTA:

(1) Je-li $f \in \mathcal{L}$ je $M = \{x \mid f(x) = \pm\infty\}$ nulové.

(2) Je-li $f \in \mathcal{L}^R$ (resp. $\mathcal{L}^K$), je $f(x) > -\infty$ (resp. $< +\infty$) skoro všude.

Důkaz: (1) Připomeňte si úmluvu 3.6 a větu 3.7.(1). Jelikož za $f + (-f)$ můžeme vzít stejně dobře 0 jako C_M, je $\int C_M = \int 0 = 0$.

(2) Buď $f \in \mathcal{L}^R$. Vezměme $f_n \in \mathcal{L}, f_n \nearrow f$. Potom $\{x \mid f(x) = -\infty\} \subseteq \{x \mid f_1(x) = \pm\infty\}$ a druhá množina je podle (1) nulová.
□

4.6 VĚTA: *Je-li $f \sim g$, je $\tilde{\int} f = \tilde{\int} g$ a $\underset{\sim}{\int} f = \underset{\sim}{\int} g$.*

Důkaz: Provedeme pro horní integrál. Není-li $\widetilde{\int} f = \widetilde{\int} g = +\infty$, můžeme předpokládat, že $\widetilde{\int} f < +\infty$. Označme $M = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, $f_n = n \cdot C_M$; pro $f_\infty = \lim f_n$ platí podle 3.8, že $\widetilde{\int} f_\infty = 0$.

Zvolme $h_1, h_2 \in Z_R$ takové, že $h_1 \geq f$ a $\mathcal{I}h_1 < \widetilde{\int} f + \frac{\varepsilon}{2}$ a že $h_2 \geq f_\infty$ a $\mathcal{I}h_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom máme $h_1 + h_2 \in Z^R, h_1 + h_2 \geq g$, a tedy $\widetilde{\int} g \leq \mathcal{I}h_1 + \mathcal{I}h_2 < \widetilde{\int} f + \varepsilon$. Tedy $\widetilde{\int} g \leq \widetilde{\int} f$ a speciálně $\widetilde{\int} g \leq +\infty$, takže můžeme proceduru provést též s vyměněnými f a g a konečně dostaneme $\widetilde{\int} f = \widetilde{\int} g$. $\square$

4.7 Důsledek: Je-li $f \in \mathcal{L}$ a $f \sim g$, je $g \in \mathcal{L}$.

4.8 Důsledek důsledku: Je-li $f \in \mathcal{L}^R$ resp. $\mathcal{L}^K$ a je-li $f \sim g$, je $g \in \mathcal{L}^R$ resp. $\mathcal{L}^K$.

4.9 Věta: *Nechť $f \geq 0$ a $\widetilde{\int} f = 0$. Potom $f \sim 0$.*

Důkaz: Položme $M_n = \{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Jelikož $0 \leq C_{M_n} \leq n \cdot f$, máme $\widetilde{\int} C_{M_n} = 0$, takže M_n je nulové. Máme $\{c \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Užijme 4.2.(2). $\square$

XXI.5 Leviho a Lebesgueova věta

5.1 Věta: *(Leviho věta) Buďte $f_n \in \mathcal{L}^R$, nechť $f_n \nearrow f$ skoro všude. Potom $f \in \mathcal{L}^R$ a $\int f = \lim \int f_n$. Podobně pro $f_n \in \mathcal{L}^K$ a $f_n \searrow f$.*

Důkaz: Můžeme samozřejmě předpokládat, že $f_n \nearrow f$. Zvolme $f_{nk} \in \mathcal{L}$ tak, aby $f_{nk} \overset{k}{\nearrow} f_n$ a definujme

$$g_n = \max(f_{ij} \mid i, j \leq n).$$

Tedy $g_n \in \mathcal{L}$ a posloupnost (g_n) neklesá. Jelikož zřejmě $g_n \leq f$, je i $\lim g_n \leq f$. Na druhé straně je ale $g_p \geq f_{np}$ pro $p \geq n$ a tedy limitou podle p dostaneme $\lim g_p \geq f_n$. Provedeme-li v této nerovnosti ještě limitu podle n, zjistíme, že $\lim g_p \geq f$. Tedy je $\lim g_n = f$ a $f \in \mathcal{L}^R$. Zbývá zjistit hodnotu $\int f$. Pokud $\lim \int f_n = +\infty$, není co dokazovat, protože $\int f \geq \int f_n$. Jinak je ale $f_n \in \mathcal{L}$ a můžeme užít lemmatu 3.8 a dostaneme $\lim \int f_n = \widetilde{\int} f = \int f$. $\square$

5.2 Věta: *(Lebesgueova věta) Nechť $f_n \in \mathcal{L}$, nechť $f_n \to f$ skoro všude a nechť existuje $g \in \mathcal{L}$ takové, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude. Potom $f \in \mathcal{L}$ a $\int f = \lim \int f_n$.*

Poznámka: *Pozorný student by měl být v prvním okamžiku nespokojen s nepořádnou formulací podmínky. Myslí se „skoro všude je pro všechna n $|f_n(x)| \leq g(x)$“, nebo „pro každé n je skoro všude $|f_n(x)| \leq g(x)$“? Ujasněte si, z čeho plyne, že to znamená totéž.*

Důkaz: Samozřejmě v důkazu zase můžeme zanedbat výrazy „skoro všude“; uvědomte si ale proč.

Položme

$$h_n = \sup_{k \geq n} f_k, \; g_n = \inf_{k \leq n} f_k.$$

Tedy máme $h_n \in \mathcal{L}^R$ (jelikož $\max(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}) \overset{p}{\nearrow} h_n$) a $g_n \in \mathcal{L}^K$. Jelikož ale

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g,$$

jsou $\int g_n$ a $\int h_n$ konečné a tedy $g_n, h_n \in \mathcal{L}$ — a tedy tím spíš $g_n \in \mathcal{L}^R$ a $h_n \in \mathcal{L}^K$. Snadno vidíme, že $\lim g_n = \lim h_n = f$ a jelikož g_n neklesá a h_n neroste, máme podle Leviho věty $\lim \int g_n = \lim \int h_n = \int f$. Uvážíme-li k tomu ještě to, že $\int g_n \leq \int f_n \leq \int h_n$, vidíme, že $\int f = \lim \int f_n$.

5.3 Poznámky:

1. Všimněte si, co se děje: Funkce g_n jsou definovány tak, že jsou zřejmě v $\mathcal{L}^K$. Omezení ale zajistí, že jsou v $\mathcal{L}$, tedy jsou též v $\mathcal{L}^R$ a jako na takové na ně užijeme Leviho věty.
2. Posloupnost (f_n) z příkladu 1.5 se prohřešuje jak proti předpokladům Lebesgueovy věty, tak proti předpokladům Leviho věty.
3. Lebesgueovu větu můžeme použít např. v případě, že f_n, definované na omezené množině $M \subseteq E_n$ (jinde ji samozřejmě dodefinujeme nulami), jsou omezeny stejnou konstantou.

□

XXI.6 Třída Λ

6.1 Připomeňme si definice $\mathcal{L}^R$ a $\mathcal{L}^K$ z 3.9. Obecněji definujme

$$\Lambda = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \to f\}.$$

6.2 Věta: *Je-li $f \sim g$ a $f \in \Lambda$, je $g \in \Lambda$.*

Důkaz: Nechť $f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{L}$, buď $M = \{x \mid f(x) = g(x)\}$. Položme $g_n(x) = g(x)$ pro $x \in M$, $g_n(x) = f_n(x)$ jinak. Máme $g_n \to g$ a podle 4.7 jsou $g_n \in \mathcal{L}$. □

6.3 Věta: *Buď $g \in \mathcal{L}$. Nechť $f_n \in \mathcal{L}^*$ a nechť $f_n \geq g$ pro všechna n. Jestliže $f_n \to f$, je $f_n \in \mathcal{L}^R$.*

Důkaz: Jelikož $-\infty \neq \int g \leq \int f_n$, musí být $f_n \in \mathcal{L}^R$. Položme $\varphi = \sup_n f_n$. Jelikož $\max_{k \leq n} f_k \overset{n}{\nearrow} \varphi$, je podle 5.1 $\varphi \in \mathcal{L}^R$ a tedy existují $\varphi_n \in \mathcal{L}$ tak, že $\varphi_n \nearrow \varphi$. Jelikož zřejmě $\varphi \geq f \geq g$, můžeme předpokládat, že $\varphi_n \geq g$ (jinak nahradíme každou φ_n funkcí $\max(\varphi_n, g)$). Položme

$$g_{mn} = \min(\varphi_n, f_n).$$

Máme $g \leq g_{mn} \leq \varphi_m$ a tedy je $g_{mn} \in \mathcal{L}$ a nadto můžeme pro limitu g_{mn} podle n užít Lebesgueovy věty a dostáváme

$$\min(\varphi_m, f) = \lim_m g_{mn} \in \mathcal{L}.$$

A nyní: $\min(\varphi_m, f) \overset{m}{\nearrow} f$ a tedy $f \in \mathcal{L}^R$. □

6.4 Důsledek Speciálně je-li $f \in \Lambda$ a $f \geq 0$, je $f \in \mathcal{L}^R$. (Místo f_n případně vezmeme $\max(f_n, 0)$.)

6.5 Věta:

(a) Jsou-li $f, g \in \Lambda$ a má-li $f + g$ smysl skoro všude, je $f + g \in \Lambda$.

(b) Je-li $f \in \Lambda$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\alpha f \in \Lambda$.

(c) Jsou-li $f, g \in \Lambda$ je $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ v Λ.

(d) Je-li $f \in \Lambda$, je $|f| \in \Lambda$.

6.6 Věta: *Funkce f je v Λ právě když f^+ i f^- jsou v $\mathcal{L}^R$.*

Důkaz: Vezměme $f_n \in \mathcal{L}, f_n \to f$. Potom zřejmě $f_n^+ \to f$ a $f_n^- \to f^-$. Užijte 6.4. Opačná implikace je zřejmá. □

6.7 Důsledek Nechť $f \in \Lambda$ a nechť pro nějaké $g \in \mathcal{L}$ platí $|f| \le g$. Potom $f \in \mathcal{L}$.

6.8 Věta: *Jsou-li $f_n \in \Lambda$ a je-li $f_n \to f$ skoro všude, je i $f \in \Lambda$.*

Důkaz: Máme $f_n^+, f_n^- \in \mathcal{L}^R$ a $f_n^+ \to f^+, f_n^- \to f^-$. Tedy podle 3.6 jsou f^+ i f^- v $\mathcal{L}^R$. □

6.9 Věta: *$f \in \mathcal{L}^*$ právě když f^+ a f^- jsou v $\mathcal{L}^R$ a výraz $\int f^+ - \int f^-$ má smysl. Následkem toho, $f \in \Lambda - \mathcal{L}^*$ právě když f^+ a f^- jsou v $\mathcal{L}^R$ a $\int f^+ = \int f^- = +\infty$.*

Důkaz: $\Rightarrow$: Nechť dejme tomu $f \in \mathcal{L}^R$. Nechť $f_n \nearrow f, f_n \in \mathcal{L}$. Jelikož $f_1 \le f = f^+ - f^-$, je $f^- \le f_1^- \in \mathcal{L}$ a tedy je hodnota $\int f^-$ konečná.

$\Leftarrow$: Má-li $\int f^+ - \int f^-$ smysl, musí být alespoň jedno z čísel $\int^+, \int f^-$ konečné a tedy f^+ nebo f^- je v $\mathcal{L}$. Tedy je $f^+ - f^-$ buď v $\mathcal{L}^R$ nebo v $\mathcal{L}^K$.
□

6.10 Poznámka Tvrzení 6.4-6.9 jsou možná dost překvapivá. Ukazuje se, že k tomu, aby limita integrovatelných funkcí byla integrovatelná na způsobu konvergence ani tak moc nezáleží. Jediné o co jde je aby kladná i reálná část limity nebyly příliš velké.

Pro hodnotu integrálu limity ale na způsobu konvergence záleží (viz 1.5 a §5).

XXII (Lebesgueova) míra

Toto bude velmi krátká kapitola. Míra je však tak důležitá záležitost, že stojí za to jí raději kapitolu věnovat, místo aby se ztrácela mezi mnoha odstavci o integrálu.

XXII.1 Měření objemů

1.1 Připomeňme si první odstavec XV. kapitoly. Byly tam jmenovány některé základní požadavky na rozumný pojem plochy. Když je modifikUjeme na vícerozměrné objemy, jde zejména o to,

- aby objem byl vždy nezáporné číslo,
- aby objem kvádru o stranách $a_1, \ldots, a_m$ byl součin $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$,
- a aby pro disjunktní A a B byl objem $A \cup B$ roven součtu objemu A a objemu B.

Ponechávám zatím stranou otázku, čemu je možno objem vůbec přisuzovat. Zakrátko se totiž dozvíme, že je to, zhruba řečeno, možné pro všechny útvary, které jsme schopni konstruktivně popsat.

1.2 Množinu $A \subseteq \mathbb{E}_m$ nazveme (Lebesgueovsky) měřitelnou, je-li její charakteristická funkce C_A ve třídě Λ (připomeňte si XXI.6) — což znamená totéž, jako když požadujeme, aby byla v L^R. Číslo

$$\mu(A) = \int C_A,$$

(konečné nebo nekonečné) nazýváme její (Lebesgueovou) mírou.

Poznámka: *Nulové množiny z XXI.4 jsou tedy právě ty $A \subseteq \mathbb{E}_m$, které mají míru nula.*

1.3 Nejprve ukážeme, že míry kvádrů (intervalů) jsou takové, jak si přejeme. Buď $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \langle a_m, b_m \rangle$. Položme $J_m = \langle a_1 - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \rangle \times \cdots \times \langle a_m - \frac{1}{n}, b_m + \frac{1}{n} \rangle$ a definujme

$$f_n(x) = \frac{\varrho(x, \mathbb{E}_m \backslash J_n)}{\varrho(x, \mathbb{E}_m \backslash J_n) + \varrho(x, J)}$$

(připomeňte si XVII.2.2; prostě potřebujeme spojitou funkci takovou, aby na J měla hodnotu 1, mimo J_m hodnotu 0 a na $J_n \backslash J$ byla někde mezi tím). Snadno vidíme, že

- každé f_n je v Z, a
- $f_n \searrow C_J$.

Hodnotu $\mathcal{I}f_n$ můžeme počítat jako Riemannův integrál $\int_{J_1} f_n$, pro který zřejmě platí

$$(b_1 - a_1 + \frac{2}{n}) \cdots (b_m - a_m + \frac{2}{n}) \leq \int f_n \leq (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m).$$

Tedy je $\mu(J) = \int C_J = \lim_n \int f_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$.

1.4 Jsou-li A, B měřitelné a disjunktní, máme $C_A, C_B \in L^R$ a $C_{A\cup B} = C_A + C_B \in L^R$ a dostáváme

$$\mu(A \cup B) = \int (C_A + C_B) = \int C_A + \int C_B = \mu(A) + \mu(B).$$

Obecně pro měřitelné A a B dostáváme, že $A \cup B$ je měřitelné a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Je totiž $C_{A\cup B} = \max(C_A, C_B) \leq C_A + C_B$ a ovšem $\max(C_A, C_B)$ je opět v L^R.

1.5 Dostáváme ale podstatně víc: Lebesgueova míra je aditivní nejen pro konečné, ale též pro spočetné systémy. Buďte A_n měřitelné. Potom

$$C_{A_1\cup\cdots\cup A_n} \overset{n}{\nearrow} C_{\bigcup^\infty A_n}$$

a tedy $C_{\bigcup A_n}$ je v L^R a $\bigcup^\infty A_n$ je tedy měřitelné. Nadto, *jsou-li* A_n *disjunktní, dostáváme* podle Leviho věty *formuli*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

(této vlastnosti se říká $\sigma-$aditivita). Obecně ovšem platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

1.6 σ-aditivita míry má některé, trochu paradoxní důsledky. Jeden jsme nenápadně použily v XXI.1.3.1. Teď se na něj trochu soustředíme. Seřaďme si racionální čísla (v XXI.1.3.1 jsme si všímali jen intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nyní můžeme pracovat na celé přímce) do posloupnosti

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

Vezměme $\varepsilon > 0$ a položme

$$U_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}).$$

Jednotlivé sčítané intervaly mají délky

$$\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}, \ldots$$

takže dostáváme

$$\mu\left(U_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy na přímce existuje hustá otevřená množina míry $< \varepsilon$. Podobné husté množiny můžeme samozřejmě zkonstruovat v kterékoli $\mathbb{E}_m$.

XXII.2 Měřitelné množiny

V tomto odstavci budeme bez dalších odkazů používat fakta o třídě Λ z odstavce XXI.6.

2.1 Zrekapitulujme si pozorování z 1.5. Platí

VĚTA: *Sjednocení libovolného spočetného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*

2.2 Podobně platí

VĚTA: *Průnik libovolného spočetného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*

Důkaz: $C_{\bigcap A_n} = \lim_{n\to\infty} \min(C_{A_1}, \cdots, C_{A_n})$. □

2.3 Dále platí

VĚTA: *Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.*

Důkaz: $C_{A\setminus B} = \max(C_A - C_B, 0)$. □

2.4 VĚTA: *Každá otevřená a každá uzavřená podmnožina $\mathbb{E}_m$ je měřitelná.*

Důkaz: Stačí dokázat pro otevřené množiny. Potom budeme vědět též, že $\mathbb{E}_m$ je měřitelná a tvrzení o uzavřených množinách dostaneme z 2.3. Dále, tvrzení stačí dokázat pro *omezené* otevřené množiny, neboť každá otevřená množina je sjednocení spočetného systému omezených, třeba jako $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U \cap B_n$ kde B_n je otevřená koule o poloměru n.

Buď tedy U omezená otevřená množina. Definujme

$$A_n = \left\{ x \mid \varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

a položme

$$f_n(x) = \frac{\varrho(x, A_n)}{\varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) + \varrho(x, A_n)}.$$

Toto je spojitá funkce s kompaktním nosičem, nabývající hodnoty 0 na $\mathbb{E}_m \setminus U$ a 1 na A_n. Tedy $f_n \in Z \subseteq L$ a tedy $\lim f_n \in \Lambda$. Zřejmě ale je $\lim f_n = C_U$: jestliže $x \neq U$, platí $f_n(x) = 0$ pro všechna x; je-li $x \in U$, je pro dostatečně velké n_0 $\Omega(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq U$ a tedy $\varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) < \frac{1}{n_0}$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $x \in A_n$ a $f_n(x) = 1$. □

2.5 Nejmenší soustava podmnožin euklidovského prostoru $\mathbb{E}_m$ obsahující všechny otevřené množiny (resp. uzavřené množiny, to samozřejmě vyjde na stejno) a uzavřené na spočetné sjednocení, spočetné průniky a rozdíly množin se nazývá soustavou *Borelovských množin.*

Z vět 2.1 – 2.4 dostáváme

DŮSLEDEK: *Všechny Borelovské množiny jsou měřitelné.*

2.6 Dodejme, že každá množina, získaná rozumnou dostatečně explicitní konstrukcí je Borelovská. S pomocí axiomu výběru se dá poměrně snadno dokázat, že existují neměřitelné množiny; užití axiomu výběru v takových důkazech se ale zdá být podstatné.