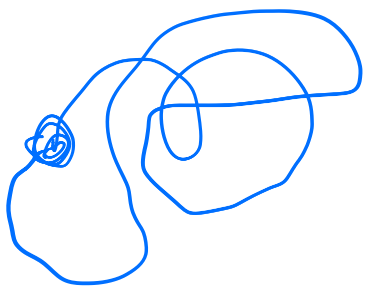
$G = (V, E)$ graf (silniční sítě)

$l : E \to \mathbb{Q}^+$ délka hran

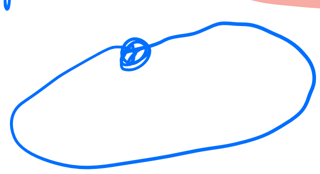
- Problém čínského pošťáka (PČP)
- Problém obchodního cestujícího (POC)

PČP: Najdi MIN trasu která projde všechny hrany a vrátí se.



Polynomiální

POC: Najdi MIN trasu která projde všechny vrcholy a vrátí se.



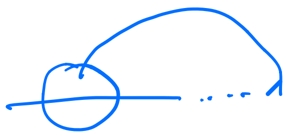
NP-úplné

Problém čínského pošťáka

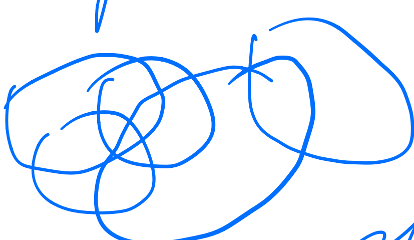
ⓐ G souvislý každý stupeň sudý $\Rightarrow$ řešení je uzavřený Eulerovský tah.

~~Algoritmus na jeho nalezení~~

• **Pozorování** $H = (W, F)$ má vš. stupně sudé, $F \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ má cyklus.

<u>Důkaz</u>:  $\boxtimes$

• Důsledkem je že $E(G)$ je hranově-disjunktní sjednocení cyklů.



To složíme do Eul. tahu.

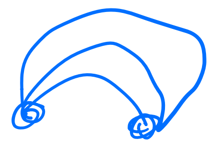
$\boxtimes$

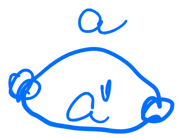
(b) Nechť G má vrcholy lichého stupně. Potom nutně pošťák musí nějaké hrany projít více než jednou.

- Nechť $T = \{v \in V;\ \deg_G(v) \text{ lichý}\}$.
- $E' \subseteq E$ se nazývá T-join, jestliže graf $G_T = (V, E')$ splňuje: $\deg_{G_T}(v)$ lichý $\iff v \in T$.
- <u>Pozorování</u>. Nechť $E' \subseteq E$ je množina hran min trasy čínského pošťáka které se projdou více než jednou. Potom se projdou dvakrát

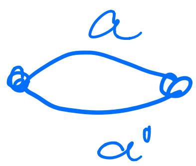
a (V, E') je min T-join.

<u>Důkaz.</u> (*) Nechť F je množina hran, jejichž dodání dělá G Eulerovský.

mohou být násobné 

Uvědomte si F obsahuje 

$\Rightarrow$

$F' = F - \{$ 

$\}$ také dělá G Eulerovský.

Tudíž čínský pošťák projde každou hranu nejvýše $2\times$.

Ty hrany které projde $2\times$ tvoří T-join. $\boxtimes$

~~Jak nalézt min T-join~~

Udělejme pomocný graf

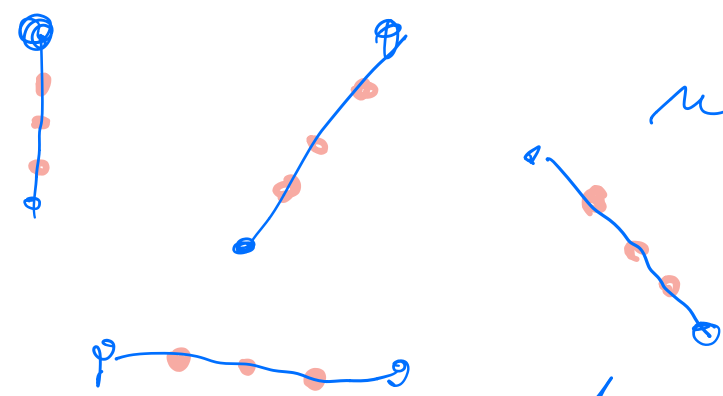
$H = \left(T, \binom{T}{2}\right)$ a

$w : \binom{T}{2} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$

$w(\{u, v\})$ = délka nejkratší cesty mezi u, v grafu G

! G má nezáporné délky hran !

$$\boxed{\text{Potom perfektní párování min. váhy v } H \text{ dává min } T\text{-join } G}$$



Příslušné nejkratší cesty jsou hranově disjunktní.

Problém Obchodního Cestujícího

NP-úplný, jen heuristiky

!! První formulace při archeologických vykopávkách v E !!

Předpoklady které dělají problém jednodušší: (0) ~~úplný graf~~ (bez újmy na obecnosti)

(*) nezáporné váhy

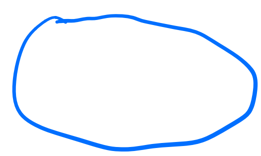
(**) trojúhelníková nerovnost:

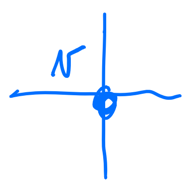
$$\left(\forall u, v, w \in V\right)\left(\ell(uv) + \ell(vw) \geq \ell(uw)\right)$$

Věta Christofidesova heuristika [platí (*), (**)] dá cestu OC délky nejvýše 3/2 nejkratší délky cesty.

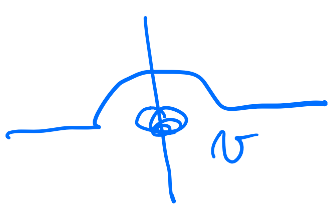
Christofidesova heuristika:

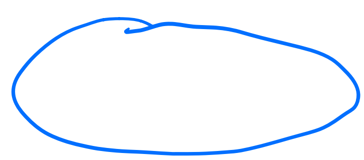
1. T min kostra
2. $W \subseteq V$: vrcholy mající lichý stupeň v T.
3. M perfektní párování v $G[W]$ min délky.
4. $J := T \cup M$ (povoleny násobné hrany)
5. (V, J) má všechny stupně sudé

(a) všechny stupně 2 $\Rightarrow$ 

(b) 

$\Rightarrow$ udělej zkratku aby výsledný graf byl souvislý:



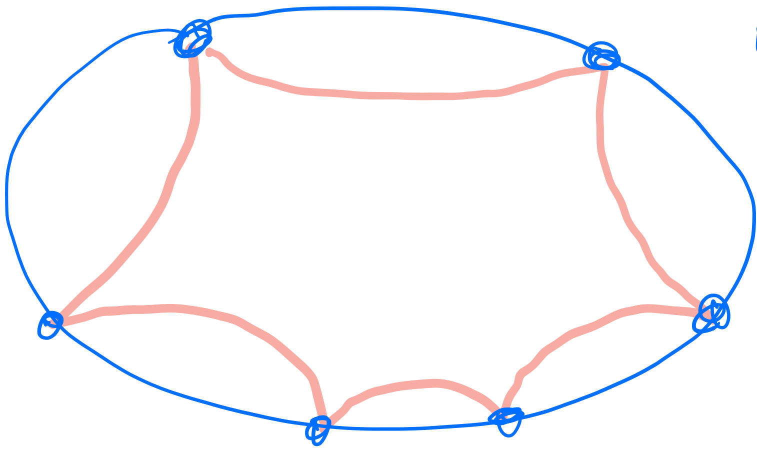
; opakuj, až .

Důkaz věty

H: optimální cesta OC. (P)

(*)

- $H \setminus e$ je kostra, tudíž $\ell(T) \le \ell(H)$
- udělej podle H cyklus C na W:



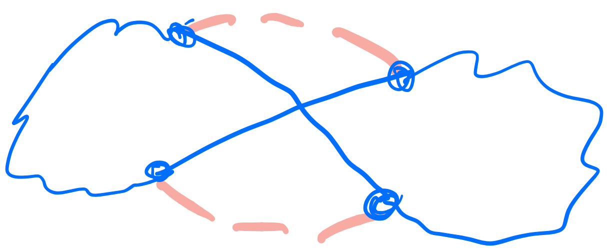
H $\ell(C) \le \ell(H)$ (**)

C sudé délky ($|W|$ sudá) má tedy 2 perfektní párování a tak aspoň jedno má délku nejvýše $\ell(H)/2$. Tudíž
$\ell(T) + \ell(M) \le 3/2\, \ell(H)$ a zkratky nezvětší délku dle (**). $\boxtimes$

Experimenty: $n \leq 1.09 \cdot OPT$

Další heuristiky:

2-OPT



Lin-Karnighan
Karnighan-Lin
} komplikovanější def, velmi úspěšné