Primární-Duální Algoritmy

Minimální Perfektní Párování (MPP)

$G = (V, E)$ bipartitní, $c : E \longrightarrow \mathbb{Q}^+$. Cílem je najít $\min\left(\sum_{e \in P} c(e) ;\ P \text{ perfektní párování } G \right)$.

Předpoklad $c \geq 0$ není omezující protože všechna perfektní párování mají stejný počet hran a proto obecnou c můžeme upravit přičtením konstanty na nezápornou c.

LP relaxace

(P) $\min \sum c_e x_e$

$(\forall v \in V) \sum_{v \in e} x_e = 1$

$x_e \geq 0$

Duál

(D) $\max \sum y_v$

$\forall uv \in E,\ y_u + y_v \leq c_{uv}$

Víme že (P) vyřeší MPP v bipartitních grafech protože matice incidence I_G je TU, je-li G bipartitní.

ALE: ukážeme jiný algoritmus pro MPP v bip. grafech; nazývá se $\boxed{\text{Primární-Duální}}$.

Je důležitý v optimalizaci a aproximačních algoritmech.

$\boxed{\text{Primární-Duální Algoritmy}}$ jsou založeny na podmínkách komplementarity. Pro naše (P), (D) jsou tvaru:

Je-li x přípustné řešení (P), y přípustné řešení (D), potom obě optimální $\Leftrightarrow$

$$\boxed{(\forall uv \in E)\,(x_{uv} > 0 \Rightarrow y_u + y_v = c_{uv})}$$

Strategie algoritmu pro MPP, bipartitní grafy:

Budeme postupně upravovat dvojici (M, y) kde (1) M je párování G (ne nutně perfektní!), (2) y je přípustné řešení (D) a (3) $M \subseteq \{uv \in E;\ y_u + y_v = c_{uv}\}$..

... poslední podmínka (3) je ~~podmínk~~ motivována podmínkami komplementarity.

- Na začátku $y := 0$, $M := \emptyset$

- Je-li M perfektní potom (M, y) jsou optimální řešení (P), (D) z podmínek komplementarity.

Tudíž stačí ukázat jak postupně upravovat (M, y).

Nechť r není pokryty M. Sestrojíme $\boxed{\text{Střídavý strom zakořeněný v } r.}$ $T = (V(T), E(T), r)$

(a) $E(T) \subseteq \{uv \in E;\ y_u + y_v = c_{uv}\}$

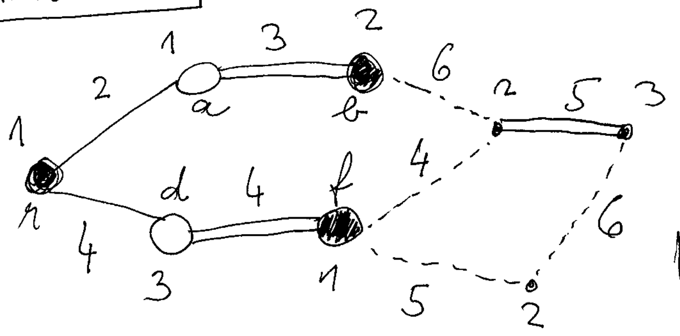
(b) $A(T) \subseteq V(T)$ lichá vzdálenost od r

$B(T) \subseteq V(T)$ sudá — " —

Požaduje se aby každý $u \in A(T)$ měl stupeň 2 v T a byl pokryt M.

Příklad

$=$ M, ● $B(T)$, ○ $A(T)$



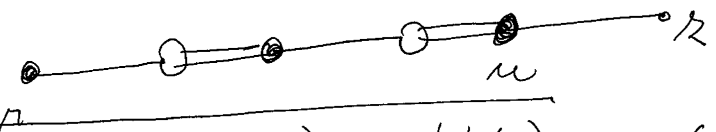
$V(T) = \{r, a, b, d, f\}$

Vždy platí $|B(T)| = |A(T)| + 1$.

Postupujeme takto { nejprve dle a, pak b, pak c ...)

(a) T není maximální $\Rightarrow$ zvětšíme T.

(b) Existuje $u \in B(T)$, $z \notin V(T)$, $uz \in E$ a navíc $c_{uz} = y_u + y_z$. Potom zvětšíme M podle alternující cesty z r do z.



(c) Existuje $u \in B(T)$, $w \notin V(T)$, $uw \in E$, a $c_{uw} > y_u + y_w$.

Nechť $\varepsilon = \min\{c_{uw} - y_u - y_w \,;\, uw \in E, u \in B(T), w \notin V(T)\}$.

Platí $\varepsilon > 0$. Změníme y:

$$y_v := \begin{cases} y_v + \varepsilon, & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon, & v \in A(T) \\ y_v & v \notin T \end{cases}$$

! ~~Ale~~ $E(T)$ zůstane nasycená

! Alespoň jedna hrana e z $B(T)$ do $V - V(T)$ se stane nasycenou, i.e. $c_e = y_{w_1} + y_{w_2}$ $[e = w_1 w_2]$

Tudíž po tomto kroku je možné provést krok (a) nebo (b)

(d) G nemá hranu z $B(T)$ do $V \setminus V(T)$. Potom pro každé ε je $y(\varepsilon)$ přípustné řešení (D), kde

$$y(\varepsilon)_v = \begin{cases} y_v + \varepsilon, & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon, & v \in A(T) \\ y_v, & v \notin T \end{cases}$$

Tudíž (D) neomezená a tudíž G nemá perf. p.

Existuje též primární-duální algoritmus na minimální cenu perfektního párování v obecných grafech. Je technicky složitější ale strategie je stejná jako pro bipartitní grafy; a je stejná ve všech primárních-duálních algoritmech.

Už víme:

G bipartitní $\Rightarrow \mathrm{con}(\chi_{E'};\ E' \text{ perf. pár.}) =$

$$(*)\ \{x \in \mathbb{R}^E;\ I_G x = 1,\ x \geq 0\}.$$

Říkáme že mnohostěn párování má popis (*) pro bipartitní grafy.

$\boxed{\text{Důležité}}$ Pro primární-duální algoritmus potřebujeme popis příslušného mnohostěnu!

Uvědomte si že důkaz správnosti prim-dual algoritmu také dokazuje správnost popisu mnohostěnu!!

Popis mnohostěnu perfektních párování pro G obecný graf ~~(bez důkazu)~~

$\boxed{\text{Věta 1}}$ $G=(V,E)$. $\mathrm{con}(\chi_{E'};\ E' \text{ perf. pár.}) =$

$\{x \in \mathbb{R}^E;\ I_G x = 1,\ x \geq 0,$

$(\forall S \subseteq V,\ |S|>1 \text{ lichá}) \sum_{|e\cap S|=1} x_e \geq 1\}.$

důkaz: ~~AKO~~ ze správnosti Prim-Dual Alg. na str. 6-10.

Další důležitý mnohostěn je mnohostěn acyklických množin hran grafu.

$\boxed{\text{Věta 2}}$ $G=(V,E)$ $\mathrm{con}(\chi_{E'};\ E' \text{ acyklická}) =$

$$\{x \in \mathbb{R}^E;\ (\forall A \subseteq E) \sum_{e\in A} x_e \leq r(A);\ x \geq 0\},$$

kde $r(A) = |V| - \#\text{komponent}(V,A)$.

Věta 1 $G = (V, E)$

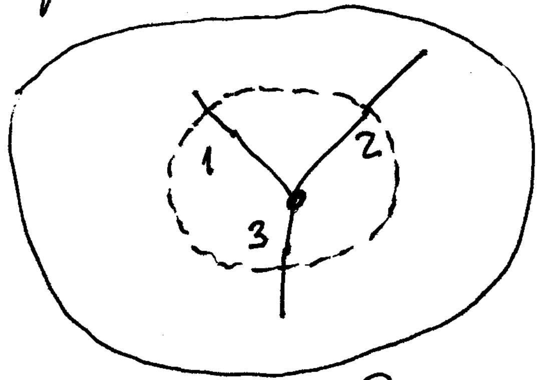
$$\mathrm{Con}(\chi_{E'};\ E' \text{ perfektní párování}) =$$
$$\Big\{x \in \mathbb{R}^E;\ I_G x = 1,\ x \geq 0,\ (\forall S \subseteq V,\ |S|>1 \text{ lichá}) \sum_{|e\cap S|=1} x_e \geq 1\Big\}.$$

Věta 2 Existuje Primární-Duální Algoritmus na nalezení perfektního párování minimální váhy.

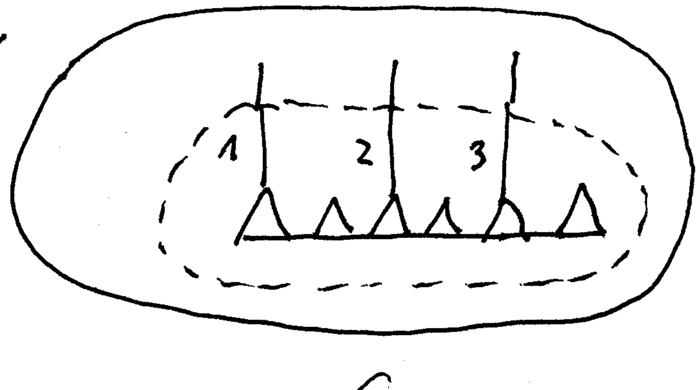
Důsledek $E' \subseteq E$ <u>sudá</u> jestliže (V, E') má všechny stupně sudé. <u>Příklad</u>: $\emptyset$, $\square$, $\triangle$, …

Věta 3 $G = (V, E)$, $w: E \to \mathbb{Q}$. Je možno najít $\max(w(E');\ E' \subseteq E \text{ sudá})$ v pol. čase.

<u>Důkaz</u>: Převod na Větu 2. Konstruujeme graf $G_\triangle$ a $\boxed{\text{bijekci}}$ mezi Množinou perfektních párování $G_\triangle$ a Množinou sudých množin G.



Nahrazení každého vrcholu



$\boxtimes$

<u>Důležitá definice</u> v diskrétní optimalizaci:

$G=(V,E)$, $T\subseteq V$, $|T|$ sudá. $E'\subseteq E$ je <u>T-join</u> jestliže v (V,E'), <u>deg(v) sudý</u> pro $v\in V\setminus T$ a <u>deg(v) lichý</u> pro $v\in T$.

<u>Příklad</u>: sudá množina je $\emptyset$-join.

$\boxed{\text{Věta 4}}$ $G=(V,E)$, $w: E\to \mathbb{Q}$. $T\subseteq V$. Je možno <u>najít max</u>$(w(E'); E'\subseteq E$ T-join$)$ v pol. čase.

Věta 4 se dokáže podobně jako Věta 3.

$\boxed{\text{Věta 5}}$ $G=(V,E)$ $\mathrm{con}(\chi_{E'}; E' \text{ acyklická}) =$

$$\{x\in\mathbb{R}^E;\ (\forall A\subseteq E)\sum_{e\in A} x_e \le r(A);\ x\geq 0\} \quad (*)$$

kde $r(A) = |V| - \#\text{komponent}(V,A)$.

<u>Důkaz</u>. <u>Stačí ukázat</u>: pro každé $w\in\mathbb{Q}^E$,

$$\max(w^Tx;\ x\in *) = \max(w(E');\ E' \text{ acyklická}).$$

Ukážeme, že <u>Hladový Algoritmus</u> najde

$$\max(w^Tx;\ x\in *).$$

$G=(V,E)$, $w: E \to \mathbb{Q}$.

<u>Hladový Algoritmus</u>: • seřaď hrany v E tak že

$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_n)$.

- Nechť m je nejmenší takové že $w(e_m) \leq 0$.
- Na začátku nechť $J := \emptyset$
- Pro $i = 1, \dots, m-1$: $J \cup \{e_i\}$ acyklická $\Rightarrow$
  $J := J \cup \{e_i\}$.

$\boxed{\text{Pozorování dokazující Větu 5}}$

Nechť J je výsledek Hladového Algoritmu.

$w^T X_J = \max\left(w^T x;\ x \geq 0, \underbrace{(\forall A \subseteq E) \sum_{e \in A} x_e \leq r(A)}_{*}\right)$.

<u>Důkaz</u>. Můžeme předpokládat $m > 1$.

Nechť $T_i = \{e_1, \dots, e_i\}$, $i = 1, \dots, m-1$.

Nechť $z \in \mathbb{R}^E$; z splňuje $*$.

$\boxed{\text{Uvědomíme si že } (\forall i \leq m-1)\quad r(T_i) = |J \cap T_i| \geq \sum_{e \in T_i} z_e}$ Tedy, označíme-li

$\boxed{e_i \text{ jen zkr. } i}$ a definujme $T_0 = \emptyset$, $z(T_i) = \sum_{e \in T_i} z_e$:

$$w^T z \leq \sum_{i=1}^{m-1} w_i z_i = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \left[z(T_i) - z(T_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{m-2} (w_i - w_{i+1})\, z(T_i) +$$

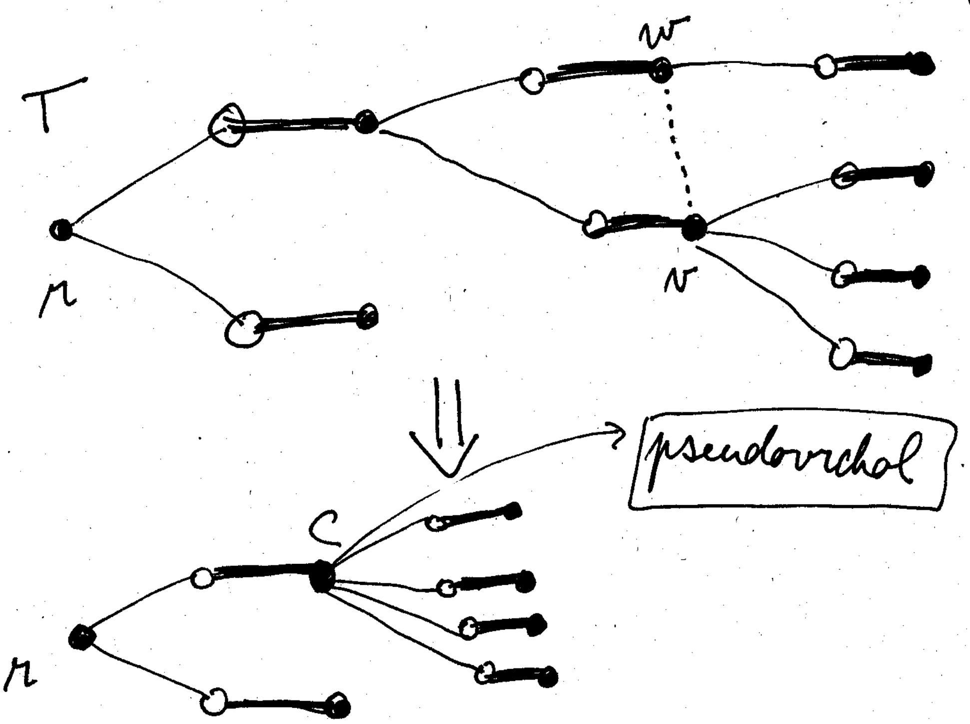
$$w_{m-1}\, z(T_{m-1}) \leq \sum_{i=1}^{m-2} (w_i - w_{i+1}) |J \cap T_i| + w_{m-1} |J \cap T_{m-1}| = w^T X_J.$$

$\boxtimes$

Primární – Duální algoritmus pro min perfektní párování v obecných grafech

Nejprve připomeňme Edmondsův algoritmus na nalezení perfektního párování v obecných grafech.

$G=(V,E)$, $M \subseteq E$ párování, r nepokrytý vrchol. Zkonstruujeme maximální střídavý strom T. M ▬ , $B(T)$ •, $A(T)$ ∘



Existuje hrana mezi B-vrcholy

⇓

kontrahuj příslušný lichý cyklus

Výsledný graf označ G'.

Platí: (1) každé párování M' v G' lze rozšířit na párování $M \supset M'$ v G se stejným defektem.

(2) Najdeme-li tudíž v G' perfektní párování, máme ho i v G. (⊛ komponent liché kardinality $\Rightarrow G$ nemá perf. pár.)

(3) Konstrukce střídavého stromu se zastaví, třeba po dalších kontrakcích, bez zlepšení M $\Rightarrow$ každý kontrahovaný vrchol $G'^{\cdots}$ je v $B(T)$ $\Rightarrow G \setminus A(T)$ má $|B(T)| = |A(T)|+1$ ⊛

Prim-dual pro obecné MPP | $G=(V,E)$

(P) $\min \sum_{e\in E} c_e x_e$

$\forall v \sum_{v\in e} x_e = 1$

$\Updownarrow$

$x \geq 0$

$(\forall S\subseteq V, |S|>1$ lichá$)$

$\sum_{|e\cap S|=1} x_e \geq 1$

(D) $\max \sum_{v\in V} y_v + \sum_{D \text{ lichý řez}} Y_D$

$Y_D \geq 0$ $\forall$ lichý řez

$(\forall e=uv\in E)$

$\bar{c}_e = c_e - y_u - y_v + \sum_{e\in D} Y_D \geq 0.$

Terminologie

$D=\{e; |e\cap S|=1\}$ se nazývá lichý řez

Podmínky komplementarity

(i) $x_e > 0 \Rightarrow \bar{c}_e = 0$

(ii) $Y_D > 0 \Rightarrow \sum_{e\in D} x_e = 1$.

Algoritmus: Upravujeme ~~trojici~~ (M, y, G') kde

1 M je párování v G, 2 (y,Y) duální přípustné řešení 3 $M \subseteq E^{=} = \{e\in E, \bar{c}_e = 0\}$ 4 $Y_D > 0$ pouze je-li D množina hran incidentních se pseudovrcholem v aktuálním kontrahovaném grafu G'.

- Na začátku: $y\equiv 0$, $Y\equiv 0$, $M=\emptyset$, $G'=G$.
- Postupujeme podle Edmondsova algoritmu, kontrahujeme cykly: řekneme jak se upraví y!

<u>Algoritmus:</u> Upravujeme (M, γ, G') kde c'

① M je párování v G', ② G' vznikne z G kontrakcemi lichých cyklů podle Edmondsova algoritmu

③ $\gamma : V(G') \to \mathbb{R}$ splňuje:

$\{u,v\} = e \in E(G') \Rightarrow \forall e \; c'_e - \gamma_u - \gamma_v \geq 0$

④ c'_e je cena hrany e v grafu G': upravuje se při kontrakci (vytvoření G')

⑤ G' má pseudovrcholy; <u>je-li v pseudovrchol,</u> <u>platí</u>: $\gamma_v \geq 0$

⑥ M je párování G' a $M \subseteq \{e = uv \in E(G');\ c'_e - \gamma_u - \gamma_v = 0\}$.

- <u>Jak dělat kontrakce:</u> $C \subseteq \{uv = e \in E(G');\ c'_e - \gamma_u - \gamma_v = 0\}$,

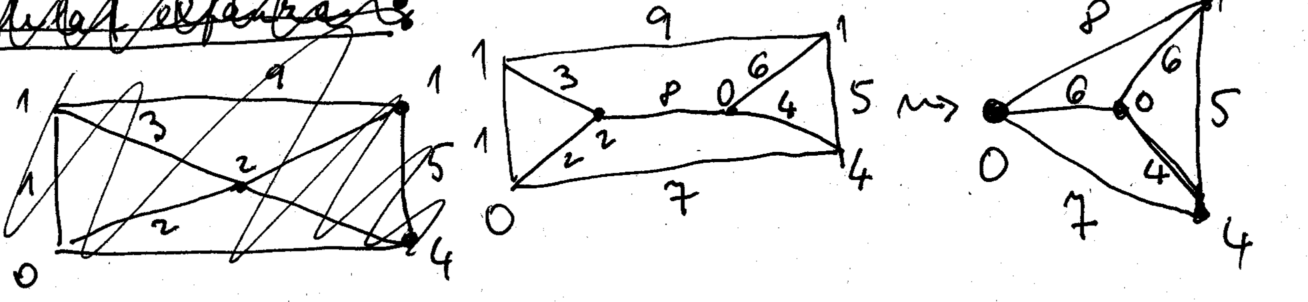
  C cyklus: ~~nový vrchol označme C, a $\gamma_C := 0$~~.

  $G' := G'$ kontrakce C; nový vrchol označme C a nazveme ho pseudovrchol.

  Dejme $\gamma_C := 0$. Cena c' se mění takto:

- $e \cap C = \emptyset \Rightarrow c_e$ se nemění
- $e = uv$, $C \cap e = \{u\} \Rightarrow c_e := c_e - \gamma_u$.

~~Jak dělat expanze:~~



Jak dělat expanze: Nechť v pokryt M.

$v \in V(G')$ vznikl ~~kontrakcí~~ kontrakcí liché kružnice nebo ~~kont~~ postupnou kontrakcí několika lichých kružnic v grafu $\tilde{G}$. Nechť V_0 značí kontrahovanou množinu vrcholů $\tilde{G}$. Platí $|V_0| > 1$ lichá.

- $G' := \tilde{G}$
- y_i, $i \in V_0$, opíšeme z $\tilde{G}$ z doby před kontrakcí
- c'_e, $e \subseteq V_0$, ~~nebo $e \cap V_0 = \emptyset$~~ ~~opíšeme z $\tilde{G}$~~ $e = uv$
  definujme předpisem $c'_e = y_u + y_v$
- $uv = e$, $u \in V_0$, $v \notin V_0$ $\Rightarrow$ $c'_e := c'_e + y_v$
- $\mathcal{D} = \{e \in E(G');\ |e \cap V_0| = 1\}$. Definujme $Y_{\mathcal{D}} := y_v$
- Nechť $w \in V_0$ je jediný vrchol V_0 pokrytý M. Nechť M' je perfektní párování ~~grafu G'~~ v H', kde H' je podgraf G' indukovaný vrcholy $(V_0 \setminus \{w\})$.
  $M := M \cup M'$.

Algoritmus (1) Na začátku $y = 0$, $M = \emptyset$, $G' = G$, $c' = c$.

(2) M je perfektní párování v G' $\Rightarrow$ expandujeme všechny pseudovrcholy a dostaneme (M, y, Y) kde M je přípustné pro (P), (y, Y) přípustné pro (D) a podmínky komplementarity jsou splněny $\Rightarrow$ M optimální.

Nechť $E^= = \{e \in E(G');\ c'_e = y_u + y_v\ (e = uv)\}$.

(3) $r \in V(G')$ nepokrytý M $\Rightarrow$ konstruujeme střídavý maximální strom T s kořenem v r.

(4) $\{u\,v\} \in E^=$, $u \in B(T)$, $v \notin T$ $\Rightarrow$ zvětši M střídavou cestou $r - v$.

(5) $\exists v \in A(T)$, $y_v = 0$, v pseudovrchol $\Rightarrow$ expanduj v na lichou kružnici, jejíž kontrakcí v vznikl.

(6) $\{uv\} \in E^=$, $\{uv\} \subseteq B(T)$ $\Rightarrow$ kontrahuj lichou kružnici C vzniklou přidáním $\{uv\}$ do T.

(7) $\{uv\} \in E \setminus E^=$, $u \in B(T)$, $v \in B(T) \cup (V \setminus T)$ $\Rightarrow$

$(*)$ $y_i := y_i$, $i \notin T$ $y_i := y_i + \varepsilon$, $i \in B(T)$ $y_i := y_i - \varepsilon$, $i \in A(T)$	ε min. možné aby $\forall e = uv$, $c_e \geq y_u + y_v$ $y_v \geq 0$ $\forall v$ pseudovrchol

(8) Existuje pseudovrchol $v \in A(T)$, $y_v > 0$ $\Rightarrow$ uprav y dle $*$ [min se teď týká jen pseudovrcholů]

(9) (3)-(8) nelze provést a nemáme perf. párování.
<u>Nutně</u>: pseudovrcholy jsou jen v $B(T)$!!

- $\forall \varepsilon > 0$ definujme $y(\varepsilon)$ předpisem $(*)$.
- Expandujme všechny pseudovrcholy; $(y(\varepsilon), Y(\varepsilon))$ je přípustné řešení (D) a cílová fce $\xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} \infty$.

<u>Tudíž</u> (D) neomezená a tudíž G nemá perf. párování.

Alg. je zřejmě polynomiální.