Párování a Hranové Řezy v Rovinných Grafech

$G = (V, E)$ graf, $w : E \longrightarrow \mathbb{Q}$ racionální váhy

$M \subseteq E$ párování jestli platí: $e, f \in M, \Rightarrow e \cap f = \emptyset$

$C \subseteq E$ hranový řez jestli existuje $V' \subseteq V$ tak že $C = \{e \in E; |e \cap V'| = 1\}$.

Párování je perfektní jestli pokrývá všechny vrcholy.

- Problém maximálního hranového řezu (MAX-CUT) je NP-úplný.
- Problém maximálního párování je první polynomiální algoritmus (deklarovaný) Edmonds 1961
- Problém maximálního perfektního párování polynomiální Edmonds 1965

! Fyzik Kastelegn 1961: v rovinných grafech, problém Maximálního Řezu a Max Perfektního Párování jsou polynomiální

2

$\boxed{A \text{ matice } (n \times n)}$

- $\mathrm{Det}(A) = \sum_{\pi \in S(n)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\pi)} \prod_{i=1}^{n} A_{i\pi(i)}$
- $\mathrm{Per}(A) = \sum_{\pi \in S(n)} \prod_{i=1}^{n} A_{i\pi(i)}$

Det(A) se dá spočítat Gaussovskou eliminací (polynomiálně)

Per(A) je těžký (#P-complete)

Příklad $G = (V_1, V_2, E)$ bipartitní. Potom počet perfektních párování je roven $\mathrm{Per}(A)$, kde

$$A = \begin{array}{c|c} & v \in V_2 \\ \hline u \in V_1 & A_{uv} \end{array}, \quad A_{uv} = \begin{cases} 1, & \{u,v\} \in E \\ 0 & \{u,v\} \notin E \end{cases}$$

$$A \subseteq E \Rightarrow w(A) \overset{def}{=} \sum_{e \in A} w(e)$$

$E' \subseteq E$ <u>sudá</u> jestli (V, E') má všechny stupně sudé

GENERUJÍCÍ FUNKCE

$$\mathcal{P}(G, x, w) = \sum_{P \text{ perf. párování}} x^{w(P)}$$

$$\mathcal{E}(G, x, w) = \sum_{E' \text{ sudá}} x^{w(P)}$$

$$\mathcal{C}(G, x, w) = \sum_{C \text{ hranový řez}} x^{w(C)}$$

$$Z(G, x, w) = \sum_{\sigma : V \to \{1, -1\}} x^{E(\sigma)}$$

$$E(\sigma) = \sum_{\substack{e = \{u, v\} \\ e \in E}} - w(e)\, \sigma(u)\, \sigma(v)$$

Partiční funkce Isingova modelu

[důvod proč se o to zajímají fyzici]

$$G \text{ rovinný} \Rightarrow Z(G) \overset{①}{\equiv} \varphi_G \overset{②}{\equiv} \mathcal{E}_{G^*} \overset{③}{\equiv} P_{G_\Delta}$$

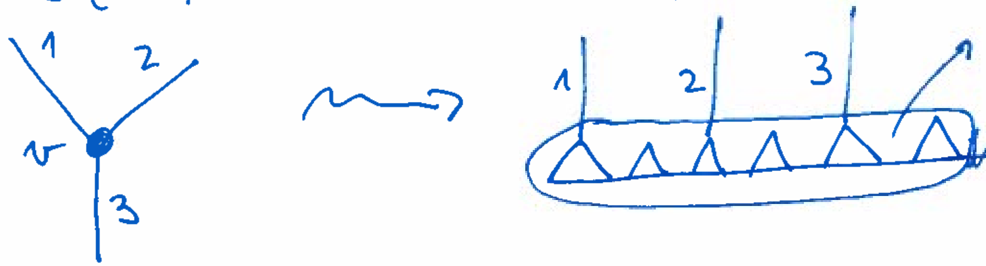
4

① $E(\rho) + \underbrace{\sum_{e \in E} w(e)}_{\text{konstanta}} = 2w(C)$ $\quad C$: řez určený $\{v;\ \rho(v)=1\}$.

② geometrická dualita

③ konstrukce Fisher (1966, také fyzik)

$\mathcal{E}(G)$ $\rightsquigarrow$ $P(G_\Delta)$



váhy 0 na pomocných hranách

Konstrukce dává přirozenou bijekci mezi sudými množinami hran G a perfektními párováními G_Δ. Bijekce zachovává váhu.

Důsledek

~~G rovinný, umíme P_G $\Rightarrow$ umíme i všechny ostatní~~

Umíme-li vypočítat P_G pro rovinné grafy, umíme i $Z, \varphi, \mathcal{E}$ pro rovinné grafy a umíme i optimalizovat.

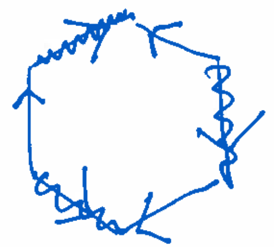
Tudíž se vraťme k párováním

~~[illegible]~~ **Věta** (Tutte 1947) G má perfektní párování $\Longleftrightarrow$ Pro každé $A \subseteq V$, $G \setminus A$ má nejvýše $|A|$ komponent s lichým počtem vrcholů.

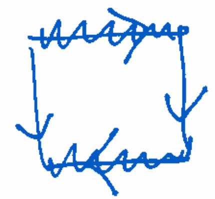
- Tutte původně větu dokázal pomocí Pfaffianu což je něco jako Det.
- Větu použil jeden fyzik a od něho se o Pfaffianech dozvěděl Kastelegn.

Výsledky Kastelegna (61) G graf, D orientace G, M_0 perfektní párování G, P (jiné) perfektní párování G. Definujme

$\operatorname{sgn}(D, M_0, P) = (-1)^{\#}$, kde $\#$ je počet **c-sudých** cyklů $M_0 \triangle P$.



c-sudý



c-lichý

$\boxed{\text{Věta}}$ (Kasteleyn 61) $G = (V,E)$ graf, D orientace G, M_0 perf. pár.

- $\mathcal{P}(G, D, M_0, x, w) = \sum_{P \text{ perf. párování}} \operatorname{sgn}(D, M_0, P)\, x^{w(P)}$ je výraz podobný DET; pro polynomiální váhy se dá dobře vypočítat.
- G rovinný $\Rightarrow$ existuje orientace D, že pro každé P_1, P_2 $\operatorname{sgn}(D, M_0, P_1) = \operatorname{sgn}(D, M_0, P_2)$.

Důsledek.

- G rovinný $\Rightarrow \mathcal{P}_G, \mathcal{E}_G, \mathcal{C}_G, Z_G$ se dají spočítat polynomiálně
- G rovinný $\Rightarrow$ problém maximálního řezu a problém maximálního perfektního párování jsou polynomiální.