11

max $c^T x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$ $\longrightarrow$ $Ax = b$, $z = c^T x$ $\rightsquigarrow$ Tabulka báze B:

$$x_B = p + Q x_N$$
$$z = z_0 + r^T x_N$$

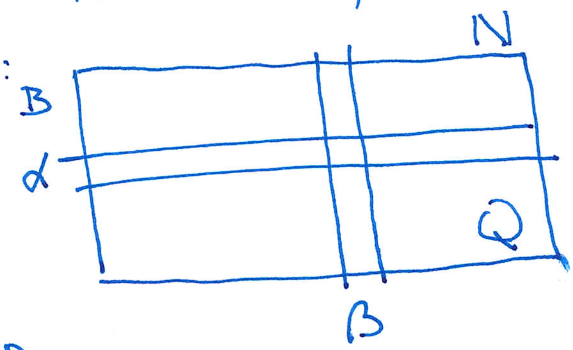
$N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

bázické řešení: $x_B = p$, $x_N = 0$; $p \ge 0 \Rightarrow$ přípustné

Vstupující proměnná: x_β, $\beta \in N$, $r_\beta > 0$.

Vystupující proměnná: x_α, $\alpha \in B$ že

- $q_{\alpha\beta} < 0$
- $-\frac{p_\alpha}{q_{\alpha\beta}} = \min\left\{-\frac{p_i}{q_{i\beta}} : i \in B,\ q_{i\beta} < 0\right\}$.



Blandovo Pravidlo

Důkaz Věty 3

Blandovo pravidlo: Vstupující proměnná má nejmenší index mezi možnými, a vystupující taky.

Věta Simplexová metoda s Blandovým pravidlem se nezacyklí, je tedy algoritmem řešícím LP.

Důkaz Sporem: předpokládejme že vznikne cyklus.

F: množina indexů proměnných které v cyklu aspoň jednou vstoupí (a tudíž i vystoupí) do báze B. platí pro obecnou simpl. m.

- **Pozorování** Všechny báze cyklu mají stejné bázické řešení $\tilde{x}$ a platí: $i \in F \Rightarrow \tilde{x}_i = 0$.

Důkaz z se nikdy nezmenší. Tudíž v cyklu musí zůstat stejné. Ale $z = z_0 + r^T x_N$; $r_\beta > 0$. Tudíž je-li $x_\beta > 0$ v nové bázi, hodnota z se zvětší. Tudíž během cyklu je $x_N = 0$ a to určuje x_B jednoznačně. ∎

Nechť v je největší index v F.

B: báze cyklu předtím než x_v vstoupí do báze

B': báze cyklu předtím než x_v vystoupí z báze.

Nechť p, Q, r, z_0 jsou parametry tabulky $T(B)$.

Nechť p', Q', r', z_0' jsou parametry tabulky $T(B')$.

Z Blandova pravidla platí:

1. $\boxed{r_v > 0, \quad r_i \leq 0 \ \forall i \in F \setminus B \setminus \{v\}}$

2. x_v je jediný kandidát na opuštění báze B', t.j.

   v je jediný index i splňující

   - $q'_{i\beta} < 0$ a
   - $-\dfrac{p'_i}{q'_{i\beta}}$ je minimální (β je vstupující index)

   Tato minimální hodnota je nutně 0, tudíž $p'_v = 0$.

   → protože $x_v = p_v = 0$ (Poz.)

   Teď použijeme Pozorování. Hodnota x_i, $i \in F$, se během cyklu nemění, a ~~tudíž~~ $x_i = 0$, $i \in F$.

   Tudíž pro $i \in F \cap B'$ platí $p'_i = 0$. Tudíž dostaneme: $\boxed{q'_{v\beta} < 0 \text{ a } q'_{i\beta} \geq 0 \ \forall i \in B' \cap (F \setminus \{v\})}$

Pomocný LP: (*)

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax = b \\ &x_{F \setminus \{v\}} \geq 0 \\ &x_v \leq 0 \\ &x_{N \setminus F} = 0 \end{aligned}$$

Tudíž $x_{B \setminus F}$ je neomezeno.

1. $x_N = 0$, $x_F = 0$ (Pozorování)

Tudíž x je přípustné pro (*)

$c^T x = z_0$.

Navíc: Pro každé x splňující $Ax = b$ je hodnota cílové fce $c^T x = z_0 + r^T x_N$. Podle 1 je to vždy $\leq z_0$. Tudíž x je optimální řešení (*).

Teď ukážeme že (2) implikuje že (*) je neomezený.
Tím najdeme hledaný spor.

x je též bázické řešení pro bázi B' (dle Pozorování).
Nechť x splňuje $Ax = b$. Potom též

$$x_{B'} = p' + Q' x_{N'} \text{ a } x_{N'} = 0 .$$

$\forall t \geq 0$ nechť $x'(t)$ se definuje takto:

(1) $x'(t)_i = 0 \ \forall i \in N' \setminus \{\beta\}$ [β je vstupující index pro B']

(2) $x'(t)_\beta = t$

(3) $x'(t)_{B'}$ upravíme tak aby $A x'(t) = b$.

! Samozřejmě, $x'(t)$ má záporné hodnoty !

Ale: $c^T x(t) = z_0' + r_\beta' \cdot t \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$.

Navíc (2) implikuje že $x'(t)$ je přípustné řešení (*) (tudíž (*) je neomezený LP):

$$x_i'(t) = \underbrace{x_i'}_{=0 \text{ (Pozorování)}} + t\, q_{i\beta}' \begin{cases} \geq 0 & \text{pro } i \in (F \setminus \{v\}) \cap B' \\ < 0 & \text{pro } i = v \end{cases} .$$

Navíc $x_i' = 0$ pro $i \in N \setminus F$ protože takové $i \in N \setminus F$ není (dle definice F) v B'.

$\boxtimes$
