Úvod do lineárního programování

Příklad 1. Jak zlepšit jídla ve školní jídelně přidáním vitamínů A, C, vlákniny. LEVNĚ.

	mrkev	zelí	okurky	dodat na jídlo
A [mg/kg]	35	0,5	0,5	0,5 mg
C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
vláknina [g/kg]	30	20	10	4 g
cena [CZK/kg]	20	20	30	

zápis pomocí lineárních nerovnic

$$\left\{\begin{array}{l}
\min\ 20x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 \geq 0 \\
x_3 \geq 0 \\
35x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \geq 0{,}5 \\
60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4
\end{array}\right\}$$

úloha lineárního programování (LP)

- LP lze vyřešit (simplexová metoda, elipsoidová metoda...)
- Patří k nejdůležitějším objevům

1939 Kantorovich (Rusko)
1947 Dantzig (USA) simplexová metoda

- LP žije v Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, n počet proměnných

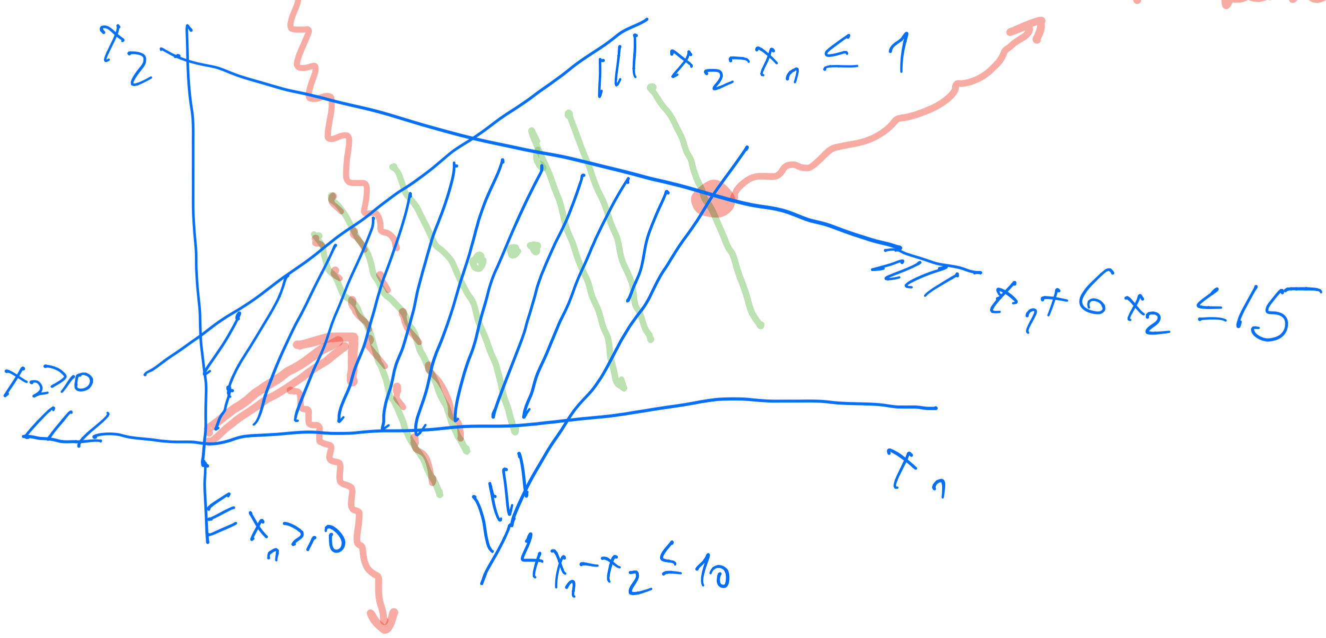
---

$\boxed{\text{Příklad 2}}$

$$\max\ x_1 + x_2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

množina přípustných řešení

optimální řešení



směr optimalizace

$\max\ c^T x$ $\quad$ A : $m \times n$ reálná matice

$Ax \leq b$ $\quad$ $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

lineární program

- Množina přípustných řešení je průnik konečně mnoha poloprostorů

• Lineární algebra	Lineární programování
teorie systémů lineárních rovnic	teorie nezáporných řešení systémů lineárních rovnic
Gaussova eliminace	Simplexová metoda
<u>množina řešení</u>: afinní prostor	<u>množina řešení</u>: průnik konečně mnoha poloprostorů

Opakování lineární Algebry

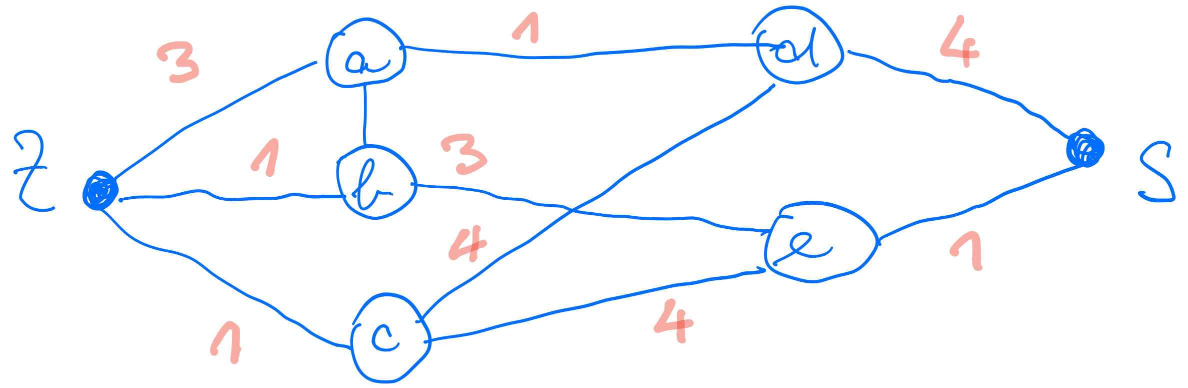
- <u>vektory</u>: jen reálné, $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = (v_1, \dots, v_n)$
- <u>lineární podprostor</u> $V \subseteq \mathbb{R}^n$: uzavřený na sčítání a násobení reálným číslem
- <u>afinní podprostor</u>: $u + V$, V lineární podprostor
- lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost vektorů, lineární obal vektorů, báze V, $\dim V$

- matice, násobení matic, řád matice, inverzní matice, determinant matice, Gaussova eliminace

---

Další Příklad: tok v sítích

Chceme poslat data v síti počítačů ze Zdroje do Stoku.



- transfer rate (in Mbit/s)

- každou hranou lze posílat oběma směry ale ne současně.

$\boxed{\text{Převod na úlohu LP}}$

- Proměnné: $x_{za}, x_{ab}, x_{zb}, x_{zc}, x_{ad}, x_{be}, x_{ce}, x_{cd}, x_{ds}, x_{es}$
- Mohou nabývat záporných hodnot a proto nepotřebujeme proměnné pro opačné orientace hran

$$\max x_{za} + x_{zb} + x_{zc}$$

$$-3 \le x_{za} \le 3, \quad -1 \le x_{zb} \le 1, \quad -1 \le x_{zc} \le 1$$
$$-1 \le x_{ab} \le 1, \quad -1 \le x_{ad} \le 1, \quad -3 \le x_{be} \le 3$$
$$-4 \le x_{cd} \le 4, \quad -4 \le x_{ce} \le 4, \quad -4 \le x_{dS} \le 4$$
$$-1 \le x_{eS} \le 1$$

Kapacity hran

$$x_{za} = x_{ab} + x_{ad}$$
$$x_{be} = x_{zb} + x_{ab}$$
$$x_{zc} = x_{cd} + x_{ce}$$
$$x_{dS} = x_{ad} + x_{cd}$$
$$x_{eS} = x_{be} + x_{ce}$$

Podmínky zachování toku v každého vrcholu

Věta o maximálním toku a minimálním řezu je dualita tohoto lineárního programu.

Celočíselné Programování

$$\max c^T x \quad Ax \le b \quad x \in \mathbb{Z}^n$$

zajímají nás pouze celočíselná přípustná řešení.

- celočíselné programování je těžké (NP-úplné)
- hlavní použití LP dnes je pro pomocné výpočty k řešení celočíselného programování

Příklad   Maximální Vážené Párování

Vstup: graf $G = (V, E)$, $w: E \to \mathbb{Q}$

párování: $M \subseteq E$ splňující $e, e' \in M \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$

perfektní párování: párování pokrývající celé V

Výstup: perfektní párování max. váhy

Celočíselný Program

$$\max \sum_{e \in E} w_e x_e$$

$$\sum_{e: v \in e} x_e = 1 \quad \text{pro každý vrchol } v \in V$$

$$x_e \in \{0, 1\}$$

Horní odhad pro tento celočíselný program dává jeho LP relaxace

LP relaxace

$$\max \sum_{e \in E} w_e x_e$$

$$\sum_{e: v \in e} x_e = 1 \quad \text{pro každý vrchol } v \in V$$

$$0 \leq x_e \leq 1$$