Kvadratické formy

Příklady

$$f(x) = 5x^2 \quad (1 \text{ proměnná})$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 3x_1x_2 + 12x_2^2 \quad (2 \text{ proměnné})$$

Obecně $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$

kde A je $(n \times n)$ matice koeficientů.

(n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$)

Definice V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$.

Bilineární forma je zobrazení

$$b: V^2 \to \mathbb{T}$$

které je lineární v obou složkách:

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$$

$$b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$$

pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, $u, v, w \in V$.

Bilineární forma je symetrická pokud $b(u,v) = b(v,u)$ pro každé $u,v \in V$.

$f: V \to \mathbb{T}$ je kvadratická forma pokud $f(u) = b(u,u)$ pro nějakou symetrickou bilineární formu b.

- Vždy $b(0,v) = b(v,0) = 0$, $f(0) = 0$.
- Každý reálný skalární součin na V je bilineární forma [ne komplexní]
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow b(x,y) = x^T A y$ je bilineární forma
- A symetrická (reálná) $\Rightarrow f(x) = x^T A x$ je kvadratická forma Doma
- $V = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \Rightarrow b: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x,y) = axy$

$a \in \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. Příslušná kvadratická forma je $f(x) = ax^2$.

- $b^1(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2$
  je bilineární forma (nesymetrická)

- $b^2(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2$
  je symetrická bilineární forma

- $f(x) = b^2(x,x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2$ je kvadratická forma

---

$$\boxed{\text{Matice Forem}}$$

$b : V^2 \longrightarrow \mathbb{T}$ bilineární forma,

$B = \{w_1, \dots, w_n\}$ báze V,

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$. Potom

$$b(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, b(w_i, w_j)$$

$\Rightarrow$ je přirozené mít maticovou representaci

kde $A_{ij} = b(w_i, w_j)$.

To vede přirozeně k definici

matice formy b vzhledem k bázi V:

Pro každé $u, v \in V$: $A_{ij} = b(w_i, w_j)$

- $b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$

kde $[u]_B$ je vektor koeficientů u vzhledem k B.

Odpovídající kvadratická forma f:

$$f(u) = [u]_B^T A [u]_B.$$

Pozorování
- $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ báze V nad $\mathbb{T}$, $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$. Potom existuje jediná bilineární forma $b : V^2 \to \mathbb{T}$, že $b(w_i, w_j) = a_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$.
- Existuje tudíž izomorfismus mezi množinou bilineárních forem na V a prostorem matic $\mathbb{T}^{n \times n}$.

[bilineární formy tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$]. Důkaz: Doma

Toto pozorování vede k jednoduchému tvaru bilineárních forem na $V = \mathbb{T}^n$:

$f(x, y) = x^T A y$ pro $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$

A je matice vzhledem ke kanonické bázi

$\boxed{\text{Věta*}}$ Nechť $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ matice kvadratické formy f vzhledem k bázi B prostoru V. Nechť B' je jiná báze a $S = {}_B[id]_{B'}$ matice přechodu od B' k B. Potom matice f vzhledem k B' je $S^T A S$ (a odpovídá stejné symetrické bilineární formě).

Důkaz: $u, v \in V$, b symetrická bilin. forma indukující f. Potom

$$b(u, v) = [u]_B^T A [v]_B =$$

$$(S \cdot [u]_{B'})^T A (S [v]_{B'}) = [u]_{B'}^T S^T A S [v]_{B'}$$

$\boxtimes$

Přirozený cíl: najít takovou bázi, vůči níž je matice formy co nejjednodušší (diagonální)

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Věta $f(x) = x^T A x$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$.
Potom existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$. Navíc tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná. Příslušná báze se nazývá polární.

Důkaz

① Existence: $A = QLQ^T$, $L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
protože A je symetrická (spektrální rozklad)
Abychom obdrželi na diagonále ± 1, definujme diagonální matici L':

$L'_{ii} = |\lambda_i|^{-1/2}$ pokud $\lambda_i \neq 0$,

$L'_{ii} = 0$ pokud $\lambda_i = 0$.

$L = Q^T A Q$

Matice QL' je matice přechodu od hledané báze B do kanonické báze:

$QL' = {}_{kan}[id]_B$: $L'Q^T A Q L'$ je $\mathrm{diag}(\pm 1, 0)$

Tudíž bázi B vyčteme ve sloupcích QL'.

② <u>Jednoznačnost</u>: sporem nechť

D, D' jsou dvě různé diagonalizace

D odpovídá bázi $B = \{w_1, \dots, w_n\}$

D' odpovídá bázi $B' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$

Nechť $u \in \mathbb{R}^n$ libovolné a nechť

$y = [u]_B$ (souřadnice u pro B)

$z = [u]_{B'}$ (souřadnice u pro B')

MÁME

$$f(u) = y^T D y = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_q^2 + 0$$

$$f(u) = z^T D z = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_t^2 + 0 .$$

ⓐ <u>$q = t$</u>: $D = S^T D' S$ pro S regulární a tudíž D, D' mají stejnou hodnost.

ⓑ $p = s$: sporem nechť $p > s$. Definujme $P = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_p\}$, $R = \operatorname{span}\{w'_{s+1}, \dots, w'_n\}$.

$\dim P \cap R = \dim P + \dim R - \dim(P + R) \geq p + (n-s) - n \geq 1 \Rightarrow$

nechť $0 \neq u \in P \cap R$, $u = \sum_{i=1}^{p} y_i w_i = \sum_{j=s+1}^{n} z_j w'_j$.

$$f(u) = \begin{cases} y_1^2 + \dots + y_p^2 > 0 \\ -z_{s+1}^2 - \dots - z_t^2 \leq 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{spor}}$$

Též plyne z pozorování které nedokážeme:

Pozorování. p = max dimenze podprostoru kde je f PD.

Význam Podle Sylvestrova zákona mají kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ v podstatě jeden z následujících tvarů v souřadnicovém systému vhodné báze:

$x_1^2 + x_2^2$; $-x_1^2 - x_2^2$; x_1^2 ; $-x_1^2$; $x_1^2 - x_2^2$; 0.

Důsledek $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a $S^T A S$ převedení na diagonální tvar. Potom počet kladných resp. záporných resp. nulových prvků na diagonále je rovno počtu kladných resp. záporných resp. nulových vlastních čísel A.

Důkaz. Uvaž $f(x) = x^T A x$. Jednu diagonalizaci získáme ze spektrálního rozkladu a pro ni tvrzení platí.
Díky jednoznačnosti ve znění Sylvestrova zákona o setrvačnosti musí počty souhlasit i pro jinou diagonalizaci. $\boxtimes$

Důsledek Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a $S^T A S$ převedení na diagonální tvar. Pak

(1) A je PD $\Leftrightarrow$ $S^T A S$ má kladnou diagonálu

(2) A je PSD $\Leftrightarrow$ $S^T A S$ má nezápornou diagonálu.

Diagonalizace matice pomocí el. úprav:

Standardně každý pivot $\neq 0$ symetricky na řádky a sloupce;
je-li pivot $= 0$, přičteme k jeho řádku vhodný řádek pod ním, a analogicky se sloupci.

Příklad (diagonalizace kvadratické formy)

Diagonalizujeme matici A symetrickými úpravami na řádky a sloupce.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A má tedy 2 kladná vlastní čísla a 1 nulové, je tedy PSD.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Nalezení polární báze

Uvažme formu $f(x) = x^T A x$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym.

Najdeme-li $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak že

$S^T A S$ je diagonální,

potom polární báze je podle Věty* tvořena sloupci S.

Jak S najít? Pokud A diagonalizujeme, kumuluje S sloupcové úpravy.

Podle předchozího příkladu:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Polární báze je $\{(1\,0\,0)^T, (-2\,1\,0)^T, (-1\,1\,1)^T\}$.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Součet čtverců lineárních forem

Nechť $f(x) = x^T A x$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická.

Je-li $f(x)$ součet čtverců lineárních forem, potom $f(x) \geq 0$ a A je PSD.

! Platí i opak: $f(x) = x^T A x$, A PSD potom $f(x)$ lze vyjádřit jako součet čtverců lineárních forem:

- Najdeme matici S pro kterou
$$S^T A S = D \text{ diagonální.}$$

Potom $A = S^{-T} D S^{-1}$ a substituce $y := S^{-1} x$:

$$x^T A x = x^T S^{-T} D S^{-1} x = y^T D y =$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \left(S^{-1}_{i*} x \right)^2$$

Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

opět

víme: $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

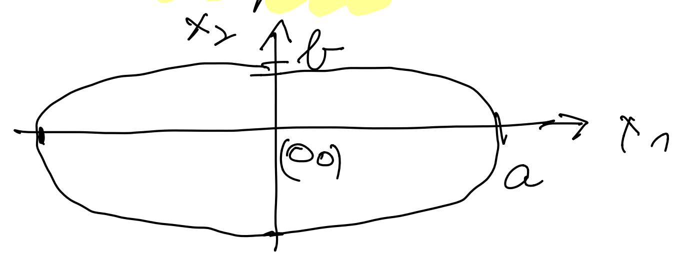
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{spočítáme})$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} \left(S^{-1}_{i*} x \right)^2 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 .$$

Kvadrika je podmnožina $\mathbb{R}^n$ popsaná rovnicí $x^T A x + b^T x + c = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Důležitý příklad: Elipsoidy

Rovnice $\frac{1}{a^2} x_1^2 + \frac{1}{b^2} x_2^2 = 1$ popisuje v rovině $\mathbb{R}^2$ elipsu se středem v počátku,



Pro vyšší dimenze: Důležité pro Elipsoidovou metodu na řešení lineárního programování, semidefinitního programování, ...

Je jí věnovaná polovina jedné letech přednášky z Optimalizace v dalších (Kolman, Loebl).

Elipsoid v prostoru $\mathbb{R}^n$:
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ PD
$\to \{(x_1,\dots,x_n)=x\,;\ x^T A x = 1\}$.

Je-li $A = Q L Q^T$ spektrální rozklad, dostaneme (substituce $y := Q^T x$)

$$1 = x^T A x = x^T Q L Q^T x = y^T L y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{((\lambda_i)^{-1/2})^2} y_i^2$$

Elipsoid v $\mathbb{R}^n$ se středem v počátku, poloosy ve směru souřadnic a mají délky $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$.

Toto je po transformaci $y = Q^T x$.

$\boxed{\text{Zpět}}$ $x = Q y$

Q ortogonální $\Rightarrow$ dostaneme "stejný" elipsoid se středem v počátku, jen "nějak pootočený nebo překlopený".

Kanonická báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ se zobrazí na sloupce matice Q (t.j. vlastní vektory A), tak poloosy výsledného elipsoidu budou ve směrech vlastních vektorů A.