Věta (Fourier-Motzkin elimination)

$Ax \le b$ je systém s n proměnnými a m nerovnicemi.
Pak existuje systém $A'x' \le b'$ s $(n-1)$ proměnnými a nejvýše $\max(m, m^2/4)$ nerovnicemi, splňující:

(1) $Ax \le b$ má řešení $\Leftrightarrow$ $A'x' \le b'$ má řešení

(2) Každá nerovnice v $A'x' \le b'$ je nezáporná lineární kombinace nerovnic systému $Ax \le b$.

[Toto je něco jako Gaussova eliminace pro nerovnice; ale je to pomalá metoda]

Důkaz Vynásobením řádků kladnými čísly dostaneme A splňující $a_{i1} \in \{0, 1, -1\}$ pro každé $i \le n$

Nechť $C = \{i;\ a_{i1} = 1\}$, $F = \{i;\ a_{i1} = -1\}$, $L = \{i;\ a_{i1} = 0\}$.

Nechť $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $a'_i = (a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i \le n$

Jestliže $n = 1$ pak x', a'_i jsou prázdné vektory.

Nechť $A'x' \le b'$ je následující systém:

(*) $a'^T_j x' + a'^T_k x' \le b_j + b_k$, $j \in C$, $k \in F$

(**) $a'^T_\ell x' \le b_\ell$, $\ell \in L$.

Speciálně, jestliže $C = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$ potom nový systém je pouze (**).

---

(2) je jasná z definice, a tudíž i „$\Rightarrow$" z (1).

Zbývá ~~[illegible]~~ „$\Leftarrow$" z (1).

Nechť $\tilde{x}' = (\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ je řešení soustavy $A'x' \le b'$. Jde o to najít vhodné $\tilde{x}_1$.

(*) je ekvivalentní

$$a_k'^T x' - b_k \le b_j - a_j'^T x', \quad j \in C, k \in F.$$ Tudíž

$$\max_{k \in F} (a_k'^T \tilde{x}' - b_k) \le \min_{j \in C} (b_j - a_j'^T \tilde{x}').$$

Zvolme $\tilde{x}_1$ libovolně mezi těmito dvěma hodnotami; to vždy jde, samozřejmě i když $C = \emptyset$ nebo $F = \emptyset$ [protože $\tilde{x}'$ splňuje (*)].

Tudíž pro každé $j \in C$, $\tilde{x}_1 + a_j'^T \tilde{x}' \le b_j$, a

- pro každé $k \in F$, $-\tilde{x}_1 + a_k'^T \tilde{x}' \le b_k$. $\boxtimes$

Důkaz Farkasova lemma z F.M. eliminace

Stačí: $Ax \le b$ nemá řešení potom existuje $y \ge 0$, $y^T A = 0^T$, $y^T b < 0$.

Postupujme indukcí dle počtu proměnných.

(1) $n = 0$. Pak $Ax \le b$ je tvaru $0 \le b$ a existuje $i : b_i < 0$. Pak zvolme $y^T = (0 \dots 0 1 0 \dots 0) = e_i$.

(2) $n \ge 1$, a nechť $A'x' \le b'$ je dán F.M. eliminací. $A'x' \le b'$ nemá řešení a máme tudíž dle indukce $y' \ge 0$.

Podle (2) věty o F.M. eliminaci je $(0|A') = MA$, $b' = Mb$ a M je nezáporná matice.

Zvolme $y = M^T y'$. Máme:
- $y^T A = y'^T M A = y'^T (0|A') = 0^T$;
- $y^T b = y'^T M b = y'^T b' < 0$.
- $y \ge 0$ neboť M nezáporná a $y' \ge 0$. $\boxtimes$

Skripta J. Sgall | Věta o oddělování

Definice 4.20. **Nadrovina** v $\mathbb{R}^n$ je množina všech $\boldsymbol{x}$ takových, že $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$ pro nějaká $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, a $b \in \mathbb{R}$.

Definice 4.21. **Poloprostor** v $\mathbb{R}^n$ je množina všech $\boldsymbol{x}$ takových, že $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq b\}$ pro nějaká $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, a $b \in \mathbb{R}$.

Následující věta ukazuje základní vlastnost konvexních množin. Je dobré si uvědomit důležitost všech předpokladů; pokud bychom nepožadovali uzavřenost nebo omezenost, bylo by možné množiny oddělit jen slabě, tj. neležely by uvnitř daného poloprostoru ale mohly by mít neprázdný průnik s hraniční nadrovinou.

Věta 4.22 (o oddělování). *Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné, uzavřené, konvexní a disjunktní a C je omezená. Pak existuje nadrovina $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$, která silně odděluje C a D, tj. taková, že $C \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} > b\}$.*

Důkaz. Vezmeme $\boldsymbol{c} \in C$, $\boldsymbol{d} \in D$ tak, že jejich vzdálenost $||c - d||$ je minimální. Pokud jsou obě množiny C i D omezené, existence dvojice $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ plyne z kompaktnosti množiny $C \times D$ v $\mathbb{R}^{2n}$ a spojitosti normy.

Pokud D není omezená, stačí se omezit na dostatečně velkou kouli, aniž bychom ztratili dvojice blízkých bodů. Přesněji to uděláme tak, že vezmeme libovolné body $\boldsymbol{c}' \in C$ a $\boldsymbol{d}' \in D$ a dále z omezenosti C nějaké $\alpha \geq 0$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in C$ platí $||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{x}|| \leq \alpha$. Označme $\beta = ||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{d}'||$ a dále D' průnik D s koulí se středem c' a poloměrem $\alpha + \beta$, tedy $D' = \{\boldsymbol{y} \in D \mid ||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{y}|| \leq \alpha + \beta\}$. Množina D' je kompaktní. Předpokládejme nyní, že body $\boldsymbol{x} \in C$ a $\boldsymbol{y} \in D$ splňují $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leq \beta$. Pak podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leq \alpha + \beta\,,$$

a $\boldsymbol{y} \in D'$. Omezením na D' tedy nepřijdeme o žádnou dvojici bodů se vzdáleností menší než $\beta = ||\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{d}'||$. Z kompaktnosti C a D' najdeme dvojici bodů $\boldsymbol{c} \in C$, $\boldsymbol{d} \in D'$ s minimální vzdáleností a tato dvojice bodů minimalizuje vzdálenost i přes $\boldsymbol{d} \in D$.

Pro vybrané $\boldsymbol{c} \in C$ a $\boldsymbol{d} \in D$ označme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$ a $b = \boldsymbol{a}^T\left(\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2}\right)$. Pak $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} = ||\boldsymbol{a}||^2 > 0$ a tedy platí

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} < b < \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}\,.$$

Z toho, že $||\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}||$ je minimální plyne, že pro všechna $\boldsymbol{c}'' \in C$ platí $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}'' \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}$. To nejlépe nahlédneme geometricky. V opačném případě by trojúhelník $\boldsymbol{c}''\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}$ měl u $\boldsymbol{c}$ ostrý úhel, a proto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \varepsilon(\boldsymbol{c}'' - \boldsymbol{c})$ pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ bude blíž k $\boldsymbol{d}$ než $\boldsymbol{c}$. Navíc z konvexity je $\boldsymbol{x} \in C$ pro $\varepsilon \in [0, 1]$, dostali jsme tedy spor s minimalitou $||\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}||$.

Obdobně pro všechna $\boldsymbol{d}'' \in D$ platí $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}'' \geq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}$. Celkově dostáváme

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}'' \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} < b < \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d} \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}''\,.$$

a tedy nadrovina $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$ silně odděluje C a D. □

4.3 Konvexní mnohostěny

Konvexní mnohostěn definujeme jako průnik konečně mnoha poloprostorů, tedy jako množinu přípustných řešení nějakého lineárního programu. Proto jsou pro optimalizaci mnohostěny a jejich studium důležité.