Příklady z Kombinatoriky a grafů II

4. série

Generující funkce, Burnsideovo lemma, vektory

přednápovědní čas odevzdání 10.2.2013 v 23:59
finální čas odevzdání 17.2.2013 v 23:59

Řešení zasílejte na adresu `kyncl zavináč kam.mff.cuni.cz` nebo odevzdávejte v čitelné podobě libovolnému cvičícímu. Můžete stále využít připravenou krabici na MS na chodbě ve 2. patře na skříni, ale v takovém případě raději ještě pošlete zprávu e-mailem.

Věty z přednášky můžete používat bez důkazu, ale vždy, když tak činíte, tak na to upozorněte; všechna ostatní tvrzení řádně zdůvodňujte.

Za řešení odevzdané před nápovědou je dvojnásobek bodů, na zápočet je potřeba 20 bodů (ze všech sérií dohromady).

1. Dokažte, že počet (neuspořádaných) rozkladů n na přirozená čísla různá od $k^2, k = 1, 2, 3, \dots$, je roven počtu takových rozkladů n, kde každé přirozené číslo k se vyskytuje méně než k-krát. **[2]**

2. Odvoďte generující funkci jedné proměnné pro počty sudých prvků ve všech uspořádaných rozkladech čísla n na součet přirozených čísel a spočítejte průměrný počet sudých prvků v těchto rozkladech. **[3]**

3. Spočítejte počet různých neizomorfních obarvení hran grafu $K_{3,3}$ pomocí n barev. (Na obarvení se nekladou žádné podmínky na různost barev apod., takže např. obarvení všech devíti hran stejnou barvou se také počítá.) **[3]**

4. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou vektory délky aspoň 1 v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^d$, kde $d \geq 1$. Dokažte, že existuje nejvýše $n^2/4$ dvojic $(i, j), i < j$, takových, že součet $x_i + x_j$ má délku menší než 1. **[1]**