Příklady z Kombinatoriky a grafů II

3. série – Barevnost, perfektní grafy, Tutteův polynom, hamiltonovské kružnice

přednápovědní čas odevzdání 3.1.2013 v 12:10
finální čas odevzdání 11.1.2013 v 10:40

Řešení zasílejte na adresu `kyncl zavináč kam.mff.cuni.cz` nebo odevzdávejte v čitelné podobě libovolnému cvičícímu, nebo přednášejícímu na přednášce, nebo do připravené krabice na MS na chodbě ve 2. patře na skříni. Věty z přednášky můžete používat bez důkazu, ale vždy, když tak činíte, tak na to upozorněte; všechna ostatní tvrzení řádně zdůvodňujte.

Za řešení odevzdané před nápovědou je dvojnásobek bodů, na zápočet je potřeba 20 bodů (ze všech sérií dohromady). Zvolte si nějakou přezdívku, pod kterou chcete mít zveřejněny výsledky na webu, a napište ji na odevzdávané řešení (včetně svého skutečného jména). Vyznačte také výrazně, na které cvičení chodíte (po/út).

1. Dokažte, že graf G je k-obarvitelný právě tehdy, když jeho hrany lze zorientovat tak, že příslušná orientace nemá orientovanou cestu na $k+1$ vrcholech ani orientovanou kružnici. **[2]**

2. Uvažme nakreslení úplného grafu v rovině (hrany nakresleny pomocí křivek, které samy sebe neprotínají), kde se každé dvě hrany kříží nejvýše jednou, přitom hrany se společným vrcholem se již nekříží. Dokažte, že pro každou hranu e, množina hran, které kříží e, tvoří perfektní graf. Můžete bez důkazu použít silnou větu o perfektních grafech. **[2]**

3. Spočítejte Tutteův polynom grafu K_4. **[1]**

4. Dokažte, že hodnota $T_G(0,2)$ Tutteova polynomu počítá počet totálně cyklických orientací G. Orientace je *totálně cyklická*, pokud každá hrana leží na nějaké orientované kružnici. **[2]**

5. Najděte všechny grafy, pro které je koeficient u členu “x” v jejich Tutteově polynomu nenulový. **[2]**

6. Dokažte, že každý silně souvislý úplný orientovaný graf má orientovanou hamiltonovskou kružnici. (Orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud z každého vrcholu v do každého jiného vrcholu w vede orientovaná cesta.) **[1]**