Tvrzení 1 (Podmínky komplementarity)**.** Buďte x a y přípustná řešení primární ($\max c^T x$ za podmínek $A \cdot x = b, x \geq 0$) a (k ní) duální úlohy lineárního programování. Pak x a y jsou optimálními řešeními, pokud platí $x_i > 0$ právě když j-té omezení v duálním programu je splněno s rovností a $y_i > 0$ právě když i-té omezení v primárním programu je splněno s rovností (tj. $y^T(b - A \cdot x) = 0$).

Příklad 1 (Vážená perfektní párování)**.** Pro konkrétní graf formulujte nalezení minimálního váženého perfektního párování jako úlohu lineárního programování. Sestavte k nalezené úloze duální program. Nelezněte řešení primární úlohy ze znalosti řešení úlohy duální.

Příklad 2 (Toky a řezy)**.** Pro daný graf formulujte nalezení maximálního toku jako úlohu linárního programováni. Sestavte k nalezené úloze duální program. Nalezněte maximální tok v grafu. Z nalezeného toku určete řešení duálního programu.

Definice 1. Mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ je racionální, jestliže A i b jsou racionální.

Příklad 3. Dokažte, že všechny vrcholy racionálního mnohostěnu jsou racionální.

Příklad 4. Nechť P je racionální mnohostěn a F je jeho stěna. Dokažte, že existuje celočíselný vektor w a celé číslo t takové, že $F = \{x \in P : w^T x = t\}$.

Definice 2. Mnohostěn je celočíselný, jestliže každá jeho neprázdná stěna obsahuje celočíselný bod.

Příklad 5. Dokažte, že každá stěna celočíselného mnohostěnu je celočíselný mnohostěn. Všimněte si, že všechny vrcholy celočíselného mnohostěnu jsou celočíselné.

Příklad 6. Dokažte, že matice incidence grafu G je totálně unimodulární právě tehdy, když je G bipartitní.