Příklad 1 (Klasický dopravní problém II)**.** Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Příklad 2 (TSP – Problém obchodního cestujícího)**.** Pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to R$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Lze tento problém řešit podobným způsobem jako v příkladě nejkratší cesty (který byste měli znát z přednášky), tj. pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{uv \in E} = 2$? Vymyslete, jak správně řešit TSP pomocí celočíselného lineárního programování.

Příklad 3 (Nejkratší cesta do všech vrcholů)**.** Pro daný vážený neorientovaný graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}^+$, a jeho vrchol s najděte délku nejkratší cesty do každého vrcholu. Zapište tento problém jako jednu úlohu lineárního programování, jejíž optimální řešení rovnou dá nejkratší vzdálenosti do všech vrcholů z vrcholu s. Pořádně dokažte, že optimální řešení vaší úlohy vždy dá správné řešení.

Příklad 4. Formulujte rozhodování o neprázdnosti polyedru jako úlohu lineárního programování.

Příklad 5. Formulujte rozhodování o neomezenosti polyedru jako úlohu lineárního programování.

Příklad 6. Dokažte z definice konvexní kombinace a obalu, že konvexní obal bodů $[0, 0], [1, 0], [0, 1]$ a $[1, 1]$ je čtverec s vrcholy v těchto bodech.

Příklad 7. Nechť X, Y jsou (konečné) množiny bodů. A nechť platí, že $\forall y \in Y$ je konvexní kombinace bodů z X. Ukažte, že $\forall z$ takové, že z je konvexní kombinace bodů z Y, je také konvexní kombinace bodů z X.

Příklad 8. Dokažte, že průnik konvexních množin je konvexní množina. Tedy nechť $A_i, i \in I$ jsou konvexní množiny, potom $\cap_{i \in J} A_i$ je také konvexní množina $\forall J \subseteq I$.

Příklad 9. Ukažte, že když bod x splňuje sadu omezení $\mathbf{a}_i^T x \leq b_i$ pro $i = \{1,\ 2, \dots,\ n\}$, že potom splňuje i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \dots,\ \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum \beta_i = 1$ platí, že $\sum \beta_i \mathbf{a}_i x \leq \sum \beta_i b_i$.

Příklad 10. Ukažte, že množina všech optimálních řešení úlohy lineárního programování je konvexní množina.

Příklad 11. Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jehož posunutím o nějaký vektor $v \in \mathbb{R}^n$ lze získat $W = U + v$. Charakterizujte všechny vektory $v \in \mathbb{R}^n$, které posunou lineární prostor U na afinní prostor W.

Příklad 12. Dokažte následující tvrzení. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathrm{Aff}(M)+u = \mathrm{Aff}(M+u)$ a $\mathrm{conv}(M) + u = \mathrm{conv}(M + u)$.

Příklad 13. Dokažte následující tvrzení. Vektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé právě, když $0, v_1, \dots, v_k$ jsou afinně nezávislé, kde 0 je nulový vektor. Dále dokažte, že $\mathrm{span}(v_1, \dots v_k) = \mathrm{Aff}(0, v_1, \dots, v_k)$.

Příklad 14. Nechť $v, u_1, \dots u_k \in \mathbb{R}^n$. Vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou afinně nezávislé právě, když vektory $v+u_1, \dots, v+u_k$ jsou afinně nezávislé.

Domácí úkol 1 (dobrovolný, k zamyšlení)**.** Mějme komunikační sít uspořádanou do kružnice s n vrcholy, dále mějme množinu volání $V = \{(i, j)\}$ a $(i, j) \in V$ když i chce volat j, $i \leq j$. Každý hovor v síti je třeba spojit, což je možné buď po anebo proti směru hodinových ručiček. Formulujte lineární program, který pro dané n a danou množinu volání V nalezne spojení, které minimalizuje největší přetížení v síti, tj. minimalizuje maximum probíhající komunikace mezi dvěma sousedními uzly.