Příklad 1. Pro která m a n je graf $K_{m,n}$ Eulerovský?

Příklad 2. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil n/2 \rceil$.

Příklad 3. Dokažte, že pro každé dva vrcholy (zakořeněného) stromu existuje právě jedna cesta, která je spojuje.

Příklad 4. Uvažme následující hru na zakořenených stromech (lesích). Hra je pro dva hráče a začíná se stromem T a jeho kořenem r. Tahem každého z hráčů je výběr (libovolného) vrcholu v aktuálním lese a smazání cesty od tohoto vrcholu směrem ke kořeni stromu, ve kterém se tento vrchol nachází. Při tomto se strom rozpadne na les, každý ze stromů tohoto lesa zakořeníme ve vrcholu, který bezprostředně sousedí s nějakým vrcholem na odebírané cestě. Existuje pro jednoho z hráčů vyhrávající strategie?

Příklad 5. Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý. Může tvrzení platit i obráceně?

Příklad 6. Pro která n existuje bipartitní graf na n vrcholech takový, že i jeho doplněk je bipartitní?

Příklad 7. Ukažte, že pro graf $G = (V, E)$ a množinu $U \subseteq V$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. U je vrcholové pokrytí grafu G,
2. $V - U$ je nezávislá množina v G,
3. $V - U$ je klika v grafu $\overline{G}$.

Příklad 8. Pokud má každý vrchol grafu stupeň alespoň 1, potom je graf souvislý.

Příklad 9. Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $m/2$ hranami.

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (6 bodů)**.** Pojďme sestavovat pohoří – takové pohoří se skládá pouze ze stoupajících a nebo klesajících stejně dlouhých částí (kupříkladu / a \). Sestavovat ale budeme trochu podivné pohoří na jehož výstavbu použijeme právě $n+1$ stoupajících dílků a právě n klesajících dílků. **Kolik je všech takových pohoří?** Pokračujme dále – sestavme si relaci na takto vzniklých pohořích. Nejprve si definujme *cyklení* – cyklení pohoří je takové pohoří, které z něho vznikne postupným odtrháváním jeho prvních dílků a jejich přilepením nakonec (ve stejném pořadí). Nyní je patrno, že dáme do relace dvě pohoří (P, Q) právě když Q je cyklením P. **Dokažte, že takto definovaná relace je ekvivalence. Dále, že všechny její třídy jsou stejně velké – jak? Ukažte dále, že každé třídě náleží právě jedno pohoří pod které je možné nakreslit čáru mezi jeho prvním a posledním bodem tak, že tato čára nikde jende pohoří neprotíná.** Teď už by to mělo něco připomínat – no jistě Catalanova čísla! **Odvoďte ze všeho toho relačního a jiného počítání vzoreček pro číslo C_n.**

Úkol 2 (3 body)**.** Ukažte, že izomorfismus dává ekvivalenci na grafech s $V_G = \{1, 2, \ldots, n\}$. Zjistěte pro jaké grafy má jejich třída ekvivalence nejvíce prvků a nalezněte příklad takového grafu pro vhodné n.

Úkol 3 (4 body)**.** Pro každé přirozené čislo n sestrojte graf, který má přesně n automorfismů.

Úkol 4 (4 body)**.** Najděte (charakterizujte) všechny grafy, které neobsahují jako podgraf

1. cestu délky 2,
2. cestu délky 3,
3. cestu délky 4,
4. žádnou sudou kružnici.