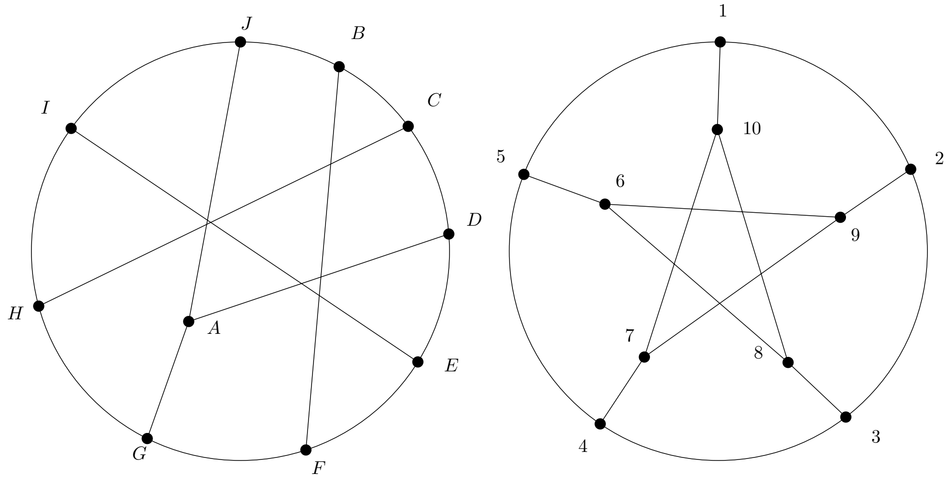
Příklad 1. Ukažte, že pro souvislý graf, který má všecny stupně sudé nemůže obsahovat most (tj. takovou hranu, jejímž odebráním z grafu, by se tento rozpadl na dvě komponenty souvislosti).

Příklad 2. Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku:



Definice 1 (Doplněk grafu)**.** Buď $G = (V, E)$ graf. Potom doplňkem G je graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ (tj. graf na nehranách původního grafu G).

Příklad 3. Ukažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jsou jejich doplňky izomofrní.

Příklad 4. Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky dva jako (indukovaný) podgraf.

Příklad 5 (Párty)**.** Na večírek dorazilo n lidí a někteří z nich si přátelsky potřasli pravicemi, jiní (z neznámého důvodu ne). Dokažte, že na konci večera existují dva účastníci večírku, kteří si potřásli pravicí se stejným počtem lidí (ne nutně se stejnými osobami).

Příklad 6. Buď G graf. Co se stane, když mocníme jeho matici sousednosti na k-tou?

Příklad 7. Nalezněte dva neizomorfní 3-regulární grafy se stejným skóre.

Příklad 8. Všimněte si, že stromy jsou bipartitní grafy.

Příklad 9. Saturovaný uhlovodík je molekula C_mH_n, kde každý uhlík má obsazené všechny 4 vazby, každý vodík jednu a molekula neobsahuje cyklus. Dokažte, že pro každé m existuje molekula C_mH_n bez násobných vazeb mezi uhlíky právě když $n = 2m + 2$. Jak bychom museli tvrzení upravit v případě, že bychom povolovali násobné vazby mezi uhlíky?

Příklad 10. Ukažte, že každý strom T má alespoň $\Delta(T)$ listů. Jak musí T vypadat, aby měl právě $\Delta(T)$ listů?

Příklad 11. Ukažte, že každý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdeme právě dvakrát.

Příklad 12. Buďte $G_1 = (V, E_1)$ a $G_2 = (V, E_2)$ grafy (na téže množině vrchulů). Dokažte, že $\chi((V, E_1 \cup E_2)) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$.

Příklad 13. Nalezněte graf a jeho dvě (různá) nakreslení do roviny, která mají různé stěny.

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (6 body)**.** Buď G graf, I jeho matice incidence. Jak vypadají matice $I \cdot I^T$ a $I^T \cdot I$? Popište výzman elementů matic $(I \cdot I^T)_{i,j}$ a $(I^T \cdot I)_{i,j}$.

Úkol 2 (x bodů)**.** Nakreslete x-regulární rovinný graf.

Úkol 3 (3 body)**.** Dokažte, že pro každé $n \geq 4$ existuje posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$ pro jejíž každý člen platí, že $1 \leq a_i \leq n-1$ a $2 | \sum a_i$, ale tato posloupnost není skóre žádného (simple) grafu.

Úkol 4 (2 body)**.** Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

1. Podgraf stromu je strom.
2. Indukovaný podgraf stromu je stom.