Příklad 1 (Hanoiské věže)**.** V Hanoi byli 3 zlaté věže. Na první z nich bylo (podle pověsti) 64 diamantových disků. Vedle věží byl chrám a v něm kněží, jejichž úkolem je přemístit všechny disky z první věže na věž třetí. Jakmile svůj úkol dokončí, není třeba další existence světa a tak svět zanikne. Kdyby přemísťovali disky závratnou rychlostí jeden přesun za sekundu, kolik času je pro náš svět vymezeno (od jeho vzniku)?

Příklad 2. Dokažte pomocí matematické indukce vztahy

1. $\sum_{i\in[n]} i = \frac{n(n+1)}{2}$ pro $n \geq 1$,
2. $\sum_{i\in[n]} 2^i = 2^{n+1} - 2$ pro $n \geq 1$,
3. $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pro $n \geq 1$,
4. $4n < 2^n$ pro $n \geq 5$,

Příklad 3. Mějme rekurentní posloupnost danou vztahem $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ s počátečními hodnotami $a_1 = 3$ a $a_2 = 7$. Nalezněte formulku pro a_n (která nebude závislá na předchozích členech posloupnosti, ale zato bude závislá na n).

Příklad 4. Kolika způsoby je možné pokrýt šachovnici $2 \times n$ pomocí (nerozlišitelných) dominových kostek?

Příklad 5. Ukažte indukcí, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Příklad 6. Ukažte indukcí binomickou větu. Tedy že $(1 + x)^n = \sum_{i\in[n]} \binom{n}{i} x^i$.

Příklad 7. Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat ze dvou množin pomocí operací průniku a sjednocení.

Příklad 8. Naposledy jsme si ukazovali, že relace obecně nekomutují (tj. $R \circ S \neq S \circ R$). Ukaže, že prázdná relace a diagonální relace komutují s libovolnou relací. Uměli byste ukázat, že žádné další takové relace neexistují?

Příklad 9. Buďte X, Y, Z množiny, $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ funkce.

1. Když f, g jsou prosté/na/bijekce, je potom nutně $g \circ f$ prostá/na/bijekce?
2. Když $g \circ f$ je prostá/na/bijekce, je potom nutně f (g) prostá/na/bijekce?

Příklad 10.

1. Dokažte, že relace R (na množině X) je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.
2. Dokažte, že pro libovolnou R je relace $T = R \cup R \circ R \cup R \circ R \circ R \cup \ldots$ tranzitivní.
3. Dokažte, že každá tranzitirvní relace obsahující R musí nutně obsahovat i T.
4. Dokažte, že pro konečnou množinu s $n = |X|$ prvky je $T = \cup_{i=1}^{n-1} R^i$ (tj. po $n - 1$ krocích lze přestat a máme trazitivní relaci). Ukažte pro každé n příklad relace R takové, že $\cup_{i=1}^{n-2} R^i$ není tranzitivní.

Příklad 11.

1. Ukažte, že pro množinu X tvoří množina 2^X a relace R definovaná $(A, B) \in R$ právě když $A \subseteq B$ ČUM.
2. Ukažte, že relace „x dělí y“ je na množině $[n]$ (neostré) uspořádání. Nakreslete Hasseův diagram pro $n = 20$.
3. Má uspořádání z bodu 2. nejmenší/největší/minimální/maximální prvky? Pokud ano, nalezněte je.

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (2 body)**.** Ukažte matematickou indukcí, že $8^n - 3^n$ je pro $n \geq 1$ dělitelné číslem 5.

Úkol 2 (2 body)**.** Ukažte, že rekurzivní posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ definovaná předpisem $a_{n+1} = 2a_n + a_n^2$ splňuje formulku $a_n = 1 - (1 - a_0)^{2^n}$ pro všechna $n \geq 0$.

Úkol 3 (2 body)**.** Ukažte, že

$$\sum_{i \in [n]} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Úkol 4 (6 bodů)**.** Nechť σ je relace mezi množinami $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$ definovaná vztahem

$$\sigma = \{(x, 3x^2 + 1) \colon x \in \mathbb{Z}\}$$

a ρ je relace mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ definovaná vztahem

$$\rho = \{(a, b) \colon b = -a \text{ nebo } b = a^2 - 3, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Popište relace $\sigma \circ \rho$ a $\rho \circ \sigma$.

Úkol 5 (6 bodů)**.** Ukažte, že pro Fibonacciho čísla f_n (s $f_1 = f_2 = 1$) platí následující pěkné vlastnosti

1. f_{3n} je sudé pro $n \geq 1$,
2. $f_{n-1} \times f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.