**Definice 1.** Řekneme, že relace $R \subset M \times M$ na (konečné) množině $M$ je

**reflexivní,** pokud pro každé $m \in M$ platí, že $(m, m) \in R$,

**symetrická,** pokud pro každé $(x, y) \in R$ platí také, že $(y, x) \in R$,

**slabě anti-symetrická,** pokud $(x, y) \in R$ a zároveň $(y, x) \in R$, potom nutně platí $x = y$,

**tranzitivní,** pokud kdykoli $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$, potom nutně také $(x, z) \in R$.

**Definice 2.** Řekneme, že relace $R$ je *ekvivalence*, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jestliže je relace $R$ reflexivní, slabě anti-symetrická a tranzitivní, hovoříme o *uspořádání*.

**Příklad 1.** Buď $X$ množina a buď dále $f : X \to \mathbb{N}$ funkce. Definujme relaci $R$ na $X$ předpisem $(a, b) \in R$ právě když $f(a) = f(b)$. Ukažte, že $R$ je ekvivalence. Popište třídy této ekvivalence pro $X = [20]$ a $f_1(i) := i$ a $f_2(i) := \lfloor i/4 \rfloor$.

**Příklad 2.** Mějme zobrazení $f$ splňující $f \circ f = f$. Příkladem takového zobrazení je identické zobrazení. Ukažte, že identita není jediné zobrazení splňující rovnici a charakterizujte všechna zobrazení, která vztah splňují.

**Příklad 3.** Ekvivalnce (stejně jako funkce) jsou speciální typy relací. Platí, že složení ekvivalencí je ekvivalence (jako v případě funkcí)?

**Příklad 4.** Naposledy jsme si ukazovali, že relace obecně nekomutují (tj. $R \circ S \neq S \circ R$). Ukaže, že prázdná relace a diagonální relace komutují s libovolnou relací. Uměli byste ukázat, že žádné další takové relace neexistují?

**Příklad 5.** Buďte $X, Y, Z$ množiny, $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ funkce.

1. Když $f, g$ jsou prosté/na/bijekce, je potom nutně $g \circ f$ prostá/na/bijekce?
2. Když $g \circ f$ je prostá/na/bijekce, je potom nutně $f$ $(g)$ prostá/na/bijekce?

**Příklad 6.**

1. Dokažte, že relace $R$ (na množině $X$) je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.
2. Dokažte, že pro libovolnou $R$ je relace $T = R \cup R \circ R \cup R \circ R \circ R \cup \dots$ tranzitivní.
3. Dokažte, že každá tranzitirvní relace obsahující $R$ musí nutně obsahovat i $T$.
4. Dokažte, že pro konečnou množinu s $n = |X|$ prvky je $T = \cup_{i=1}^{n-1} R^i$ (tj. po $n-1$ krocích lze přestat a máme trazitivní relaci). Ukažte pro každé $n$ příklad relace $R$ takové, že $\cup_{i=1}^{n-2} R^i$ není tranzitivní.

**Příklad 7.** Určete počet různých čtyř-prvkových ČUMů.

**Příklad 8.**

1. Ukažte, že pro množinu $X$ tvoří množina $2^X$ a relace $R$ definovaná $(A, B) \in R$ právě když $A \subseteq B$ ČUM.
2. Ukažte, že relace „$x$ dělí $y$“ je na množině $[n]$ (neostré) uspořádání. Nakreslete Hasseův diagram pro $n = 20$.
3. Má uspořádání z bodu 2. nejmenší/největší/minimální/maximální prvky? Pokud ano, nalezněte je.

**Příklad 9.** Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat ze dvou množin pomocí operací průniku a sjednocení.

**Úkol 1** (4 body)**.** Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

1. $\leq_A$: $(a, b) \leq_A (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$,
2. $\leq_B$: $(a, b) \leq_B (c, d)$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$,
3. $\leq_C$: $(a, b) \leq_C (c, d)$ právě když $a < c$ nebo $a = c$ a zároveň $b \leq d$,
4. $\leq_D$: $(a, b) \leq_D (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$.

**Úkol 2** (1 bod)**.** Na množině komlexních čísel definujme relaci $R$ předpisem $(x, y) \in R$ právě když $|x| = |y|$, kde $| \cdot |$ značí velikost (absolutní hodnotu) komlexního čísla. Je tato relace reflexivní, symetrická, anti-symetrická, tranzitivní?

**Úkol 3** (4 body)**.** Určete maximální možný počet různých množin, které lze získat pomocí operací průniku, sjednocení a množinového rozdílu ze dvou počátečních množin.

**Úkol 4** (2 body)**.** Popište podmínky pro reflexivitu, symetrii a tranzitivitu relace v řeči matice sousednosti relace.