Příklad 1. Ukažte, že pro libovolný polyedr P platí, že průnik libovolných jeho stěn je opět stěna.

Příklad 2. Napište lineární program, který maximalizuje obsah kružnice, kterou je možně vepsat do mnohoúhelníku zadaného nerovnostmi jako $Ax \leq b$.

Příklad 3. Napište lineární program, který pro daný polyedr $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ určí vzdálenost P od počátku v l_1 metrice tj. minimální vzdálenost v takovou, že $\exists x \in P$ platí, že $l_1(x, 0) \leq v$.

Příklad 4. Dokažte, že každý mnohostěn má konečně mnoho stěn.

Příklad 5. Dokažte, že n-rozměrná koule není polyedr.

Příklad 6. Buď Labe regulovaná řeka (tj. v našem okolí daná rovnicí $ax = b$), buď dále hospoda objekt na levém břehu Labe. Dále víte, že jdete-li (rovnou) cestou od hospody k přívozu, míjíte kiosek. Ukažte, že kiosek neleží ani na pravém břehu ani na Labi.

Příklad 7. Jestliže $F = \{x;\ Ax \leq b,\ A'x = b'\}$ je stěna polyedru $P = \{x;\ Ax \leq b\}$, kde $A'x \leq b'$ je podsystém $Ax \leq b$, pak existuje nadrovina $w^T x = t$ taková, že $P \subseteq \left\{x;\ w^T x \leq t\right\}$ a $F = P \cap \left\{x;\ w^T x = t\right\}$.

Příklad 8. Bod v mnohostěnu P je vrcholem P právě, když v nemůže být zapsán jako konvexní kombinace ostatních bodů z P.

Příklad 9. Buď $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, Bx = 0\}$, ukažte že $dim(P) = n - rank(B)$.

Domácí úkoly - termín odevzdání 28.03.2012

Ještě před úkoly připomeňme definici.

Definice 1. Buď $f : S \to \mathbb{R}$, reálná funkce a $S \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je konvexní na S, když $\forall x, y \in S$ platí, že $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ pro libovolné $0 \leq \lambda \leq 1$. Pokud $S = \mathbb{R}^n$ pak říkáme, že f je konvexní.

Domácí úkol 1 (4 body)**.**

a Buď $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ konvexní funkce na S. Ukažte, že pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ je množina $S_t = \{x \in S \mid f(x) \leq t\}$ konvexní.

b Ukažte, že součet dvou konvexních funkcí je opět konvexní funkce.

c Rozhodněte, zda je také součin dvou konvexní funkcí konvexní funkce. Pokud ano, dokažte, pokud ne, nalezněte protipříklad.

Domácí úkol 2 (6 bodů)**.** Buď P polyedr dimenze d. Ukažte, že pro každou vlastní stěnu S polyedri P platí $dim(S) \leq d - 1$.

Domácí úkol 3 (10 bodů)**.** Ukažte, že soustava rovnic $Ax = b$ má řešení právě když soustava $y^T A = 0, y^T b = -1$ nemá řešení. Pro důkaz nepoužívejte Farkasovo lemma!