Příklady ke cvičení

Příklad 1: Kolik prvků má aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^4$? Kolik prvků má nějaký nejmenší a nějaký největší vlastní podprostor $\mathbb{Z}_5^4$? Vypište prvky nejmenšího podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$, který obsahuje vektory $(0,0,0,4)^T, (2,4,3,2)^T$ a $(1,2,4,3)^T$.

Příklad 2: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.

Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Příklad 3: V systému podmnožin množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$ braném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b, d, e\}$,
- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a, c, d\}$, $\mathbf{w} = \{b, c\}$, $\mathbf{x} = \{a, b, d, e\}$ a $\mathbf{y} = \{b, e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a, b, e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad 4: Rozhodněte, zdali je struktura $(\{0,1,2,3,4,5\}, \oplus, \odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \mod 6$ a $a \odot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} \mod 6$.

Příklad 5: Ukažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ řádu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{K}$ platí, že její jádro $Ker(\mathbf{A})$ je podprostorem $\mathbb{K}^n$.

Příklad 6: Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostorech $\mathbb{R}^4, \mathbb{Z}_3^4$ a $\mathbb{Z}_5^4$. Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

a) $X_1 = \{(0,1,2,1)^T, (1,2,0,0)^T, (1,1,2,0)^T, (1,2,1,1)^T\}$.

b) $X_2 = \{(1,1,2,0)^T, (1,2,1,1)^T, (0,1,2,1)^T, (1,1,0,0)^T\}$.

c) $X_3 = \{(1,0,2,0)^T, (2,1,0,2)^T, (0,2,2,1)^T, (2,2,1,1)^T\}$.

Příklad 7: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u + v, u + w\}$.

b) $\{u + v, u - v, w\}$.

c) $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$.

d) $\{u+v, u+w, v+w\}$.

e) $\{u-v, u-w, v-w\}$.

f) $\{u-2v+w, 3u+v-2w, 7u+14v-13w\}$.

g) $\{u, 2u, w\}$

h) $\{u, v+w\}$.