Příklad 1 (Matice nejsou těleso)**.** Zkuste si rozmyslet, jaká **všechna** omezení by musela platit pro matice tvaru $n \times n$, aby tyto tvořily těleso. Nalezněte co nejvíce sporů.

Příklad 2. Nalezněte iredukcibilní polynom stupně 3 nad tělesem $GF[2]$.

Příklad 3. Zkonstruujte tabulku počítání pro $GF[2^3]$ pro váš iredukcibilní polynom.

Příklad 4. Pokud prvky $GF[2^3] = \{0, 1, a, b, c, d, e, f\}$ nalezněte řešení pro následující soustavy a řešení zapište je ve tvaru $x = u + pv + \dots$, kde $p \in GF[2^3]$ a u, v atd jsou pevné vektory z $GF[2^3]^4$.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ d & d & a & a \\ a & a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & e \\ c & a & c & c \\ d & d & a & a \\ a & a & d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. Nalezněte inversní matice nad $GF[5]$ (pokud existují) k maticím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 6 (Ludolfova matice)**.** Nalezněte inversní matici nad $GF[11]$ k matici:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 7 (Axiomy tělesa)**.** Z axiomů odvoďte, že pro počítání v tělese $\mathbb{F}$ platí:

a) Pro $a, b \in \mathbb{F}$ má rovnice $a + x = b$ jednoznačné řešení $x \in \mathbb{F}$.

b) Pokud $a + b = a + c$, potom $b = c$.

c) Jednotka a inverzní prvky jsou určeny jednoznačně.

d) Pro všechna $a \in \mathbb{F}$ platí $(-1)a = -a$.

Příklad 8. Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1\,001}$ a $4^{1\,000\,001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.