Příklad 1. Určete hodnost matic(a transponovaných matic).

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1-i & 2+2i \\ 1+i & 1 & (1+i)^2 \\ 2i & i & 5+i \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Řešte soustavy rovnic a určete rank rozšířené matice soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^1$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^2$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^3$ pro: (Jak spolu souvisí geometrické interpretace těchto soustav?)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 3 (Magické matice)**.** Magická matice řádu n je matice tvaru $n \times n$, která obsahuje všechna čísla $1, 2, \ldots, n^2$, pro kterou platí, že součet v každém sloupečku je stejný. Určete honotu maticového součinu $M_n \cdot 1_n$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda úhel který svírají s přímkou $p : 2x - 3y = 6$ následující přímky je ostrý, pravý, tupý nebo přímý.

a) $q : -x + y = 1$

b) $r : 2x + y = -12$

c) $s : -6x + 9y = 12$

Příklad 5. Jsou dány dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$ a jejich délky $\|u\| = 5$ a $\|v\| = 3$. Jaká je maximální a minimální hodnota součinu $|u \cdot v|$?

Příklad 6. Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Příklad 7 (Cosine Law)**.** Jistě si všichni vzpomínáte na Cosinovu větu, tedy že $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|cos(\phi)$. Ukažte, že je-li úhel $\phi \leq 90^\circ$, potom $\|v - w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2$.