Příklad 1 (eulerova rozcvička)**.** Nalezněte eulerovské tahy v grafech na tabuli.

Příklad 2. Rozhodněte, zda indukovaný podgraf stromu je opět strom.

Příklad 3. Ukažte, že stromy jsou přesně ty grafy, kde mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta.

Příklad 4. Dokažte, že je-li graf strom, potom nemá kružnice a platí $|V| = |E| + 1$.

Příklad 5. Nechť strom G obsahuje vrchol stupně alespoň k, dokažte, že potom obsahuje alespoň k listů. Které takové grafy mají právě k listů?

Příklad 6. Nalezněte graf a jeho dvě nakrelsení do roviny takové, že mají různé stěny.

Příklad 7. Ukažte, že posloupnost $(d_1, \dots, d_n)$ kladných celých čísel je skóre stromu právě když $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Příklad 8 (Trocha chemie)**.** Saturovaný (česky spíše nasycený) uhlovodík je molekula C_mH_n, kde každý uhlík má všechny 4 vazby obsazené a každý vodík 1 obsazenou (použitou) a žádná sekvence atomů netvoří cyklus. Dokažte že $\forall m$ existuje molekula C_mH_n, pokud $n = 2m + 2$.

Příklad 9. Kolik stěn bude mít rovinný graf s n vrcholy (popř. pro jaká n existuje), pokud má být

a) 3-regulární,

b) 3-regulární bipartitní,

c) k-regulární?

Příklad 10 (Těsnost odhadu)**.** Pro $\forall n$ nalezňete rovinný graf s n vrcholy bez trojúhelníku, který má $|E| = |V| - 4$.

Příklad 11. Mějme posloupnost $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{43}, \dots$. Nalezněte vzorec pro i-tý člen.

Příklad 12. V petersenově grafu nalezněte podrozdělení $K_{3,3}$.

Příklad 13. Buď G roviný graf a e most v G. Dokažte, že G/e je roviný. Platí i obrácená implikace?

Příklad 14. Zobecněte a dokažte eulerův vzorec ($|V| + |E| + |S| = 2$, kde S je množina stěn) pro nesouvislé rovinné grafy.

Příklad 15 (DCV 1)**.** Na zakořeněném stromě definuji následující hru dvou hráčů. Každý hráč si ve svém kole vybere libovolný vrchol stromu a poté ze stromu smaže (jednoznačně určenou) cestu z kořene do tohoto vrcholu. Strom se tímto rozpadne na lesy, které zakořeníme ve vrcholech sousedících s odebíranou cestou. Přičemž vyhrává ten hráč, který odebere poslední vrchol (tj. prohrává ten, který již nemá co vzít). Dokažte, že první hráč má vyhrávací strategii.

Příklad 16 (DCV 2)**.** Buď G roviný graf s alespoň jedenácti vrcholy. Ukažte, že komplement grafu $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus V)$ je nerovinný.

Příklad 17 (DCV 3)**.** Buď G graf s $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Definuji množinu transpozic $S := \{(i, j) \mid \{i, j\} \in E(G)\}$ (připomenu, že transpozice je taková permutace, která nechá všechny prvky až na dva na místě).

a) Ukažte, že S gemeruje všechny permutace $\{1, \dots, n\}$ právě když je G souvislý.

b) Ukažte, že S je nejmenší možná množina transpozic generující všechny permutace $V(G)$ právě když G je strom.