Věty a definice

Definice 1 (Konečný pravděpodobnostní prostor)**.** je uspořádaná dvojice (Ω, P), Ω je množina *elementárních jevů* a funkce $P : \Omega \to [0, 1]$ je *funkce pravdepodobnosti* taková, že $\sum_{a\in\Omega} P(a) = 1$.

Podmíněná pravděpodobnost Podmíněná pravděpodobnost jevu A jevem B se značí $P(A|B)$ a je možné ji spočítat jako $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Věta 1 (Bayesova)**.** Buďte A, B dva náhodné jevy, nechť dále platí $P(B) > 0$, potom platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Pro více jevů pak $P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$.

Věta 2 (Markovova nerovnost)**.** Pro náhodnou veličinu X platí $P(X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]) \leq 1/t$.

Přiklady

Priklad 1. Předpokládejme, že pohlaví všech dětí je nezávisle náhodné s pravdépodobností 1/2.

1. Ze všech rodin s dvěma dětmi zvolme jednu rodinu náhodně. Starší dítě je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?
2. Ze všech rodin s dvěma dětmi – z toho jednou dcerou – zvolme jednu rodinu náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dcery?

Priklad 2 (Monty Hall problem)**.** Vyhráli jste televizní soutěž. Máte nyní na výběr ze tří dveří, z čehož za jedněmi je auto a za dvěmi je koza. Vašim cílem je získat auto. Ze tří stejných dveří jste si jedny vybrali. Moderátor vám neřekne, co za nimi je, ale otevře jedny ze dvou nevybraných dveří – tam je koza. Zbývají tedy dvoje dveře. Moderátor vám dá na výběr, jestli nechcete přehodnotit volbu dveří.

Otázka zní: co se týče pravděpodobnosti, vyplatí se vám nyní ukázat na druhé dveře, nebo se vyplatí ponechat si volbu, nebo je to jedno?

Priklad 3. Mějme tři krabice se žárovkami. V první je 10 žárovek, 4 z nich jsou špatné. Ve druhé je 6 žárovek, jedna je špatná. Ve třetí je 8 žárovek, 3 z nich špatné. Z rovnoměrně náhodně zvolené krabice rovnoměrně náhodně zvolíme žárovku. Jaká je pravděpodobnost, že bude funkční?

Priklad 4. Mějme klasickou kostku, jaká je střední hodnota jednoho hodu? Jaká je střední hodnota při hodu k kostkami?

Jaká je pravďwpodobnost, že při hodu k kostkami padne v součtu alespoň $4k$?

Priklad 5. Představme si hrací kostky (šestistěnné), které mají na každé stěně napsáno libovolné přirozené číslo (mohou se opakovat). Řekneme, že kostka A *je lepší než* kostka B, jestliže při hodu oběma kostkami padne na kostce A větší číslo než na kostce B s pravdépodobností alespoň 1/2.

Nalezněte trojici kostek A, B, C takových, že A je lepší než B, B je lepší než C a C je lepší než A.

Úkoly

Úkol 1 (2 bod)**.** Rytíři kulatého stolu zasedli k jednáni—dle středověkých zvyků jich bylo n. Jelikož ale byli vyhladovělí z bitvy, nejprve si objednali jídlo—každý jiné. Když obsluha jídlo donesla a před každého rytíře položila jím objednané jídlo, celý stůl se vznesl do výše a náhodně se otočil a poté opět dosedl na své místo.

1. Jaký je očekávaný počet rytířů, kteří po návratu stolu mají před sebou opět své jídlo?
2. Jaká je pravděpodobnost, že všichni rytíři dostanou zpět své jídlo?

Úkol 2 (3 body)**.** Mějme 3 mince, z toho jsou 2 mince férové (tedy s pravďěpodobností 1/2padne hlava a se stejnou pravděpodobností orel) a jednu cinknutou (zde padne hlava s pravděpodobností 2/3). Mince jsou navzájem rozlištelné—řekněme barevné červená, modrá a zelená.

Pokud na začátku nevíme nic, pak pravděpodobnost, že červená mince je ona cinknutá, je 1/3.

Hodíme těmito mincemi. A padne nám na červené a modré minci hlava, na zelené orel. Jaká je pravděpodobnost, že červená mince je cinknutá po takovémto hodu?