Věta 1 (Princip inkluze a exkluze)**.** Buďte $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny. Potom

$$|\bigcup_{i\in[n]} A_i| = \sum_{\emptyset\neq X\subseteq[n]} (-1)^{|X|+1} \cdot |\bigcap_{i\in X} A_i|.$$

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze—doplňková verze)**.** Buďte $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny a nechť navíc $A_i \subseteq U$ pro nějakou konečnou množinu U. Potom

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} \left(U \setminus A_i\right)\right|,$$

kde výraz $\bigcap_{i\in\emptyset} U \setminus A_i$ definujeme jako množinu U.

Příklad 1. Dokažte Větu 2.

Příklad 2. Kolik je na n-prvkové množině

1. relací,
2. symetrických relací,
3. reflexivních relací,
4. anti-symetrických relací?

Příklad 3. Kolik je (devítimístných) telefonních čísel, které obsahují každé liché číslo alespoň jednou?

Příklad 4. Sečtěte sumy

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} =$$

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} =$$

Příklad 5. Kolika způsoby lze na šachovnici 4×4 umístit 8 kamenů tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtiři kameny ve stejném řadku nebo ve stejném sloupci?

Úkol 1 (2 body)**.** Kolik je slov nad abecedou $A = a, b, c, \ldots, h$ takových, že se písmeno a vyskytne právě dvakrát písmeno f právě čtyřikrát a ostatní písmena nanejvýš jednou.

Úkol 2 (3 body)**.** V balíčku je 52 karet (po 13 z každé barvy). Rozdáme 13 karet—jaká je pravděpodobnost, že v těchto kartách bude alespoň jedna z každé barvy? (Počítejte jako počet příznivých rozdání ku počtu všech.)