NDMI018: Aproximační a online algoritmy

Termín: s dostatečným předstihem před zkouškou

Cíl: Získat alespoň polovinu možných bodů

Body budou přiděleny dle výsledného aproximačního/kompetitivního poměru.

Příklad 1 Pro problém MAX-SAT uvažte algoritmus, který v každém kroce vybere proměnnou, jejímž nastavením (na `True` nebo na `False`) splní nejvíce klauzulí (v případě remízy zvolíme například tu s nejmenší indexem) a na závěr dosadí. Nalezněte

1. aproximační poměr tohoto algoritmu a **2 body**
2. dolní odhad (rodinu formulí), které ukazují optimalitu důkazu předchozího bodu. **2 body**

Příklad 2 STEINER TREE je problém jehož instance je popsána

Vstup:	graf $G = (V, E)$, ohodnocení hran $c : E \to \mathbb{R}^+$ a množina terminálů $S \subseteq V$
Výstup:	$F \subseteq E$ taková, že všechny terminály jsou v jedné komponentě souvislosti grafu $G[F]$
Cíl:	minimalizovat cenu hran v množině F, tj. $\min_{f \in F} c(f)$

Nalezněte 2-aproximační algoritmus pro STEINER TREE problém (v obecném případě, tedy není legální předpokládat, že například hrany tvoří metriku – je ovšem dobré se podívat pro začátek na takovýto připad). **6 bodů**

Příklad 3 Najděte algoritmus počítající optimální řešení pro k-SERVER problém v čase polynomiálním v k a n, kde n je délka vstupu. (Zkuste toky v sítích.) **2 body**

Příklad 4 Problém ONLINE BIPARTITNI PÁROVÁNÍ na grafu $G = (U \cup V, E)$ dostane na vstupu množinu U a v každém z online kroků dostane jeden vrchol $v \in V$ a spolu s ním všechny hrany $E(v) = E \cap (U \times \{v\})$. Definujme ještě množinu volných hran u v předpisem $A(v) = \{\{u, v\} \in E(v) : u \text{ není dosud spárován}\}$. Algoritmus rozhodne, zda nějakou (volnou) hranu, tedy z množiny $A(v)$, použije a přidá jí do konstruovaného párování. Cílem je získat co možná největší párování. Ukažte, že

1. hladový algoritmus je 2 kompetitivní, **2 body**
2. neexistuje lepší než 2 kompetivní deterministický algoritmus a **2 body**
3. pravdépodobnostní algoritmus vybírající náhodnou hranu z $A(v)$ je také 2 kompetitivní **2 body**
4. algoritmus RANKING z přednášky je stejně dobrý (kompetitivní poměr $1 - 1/e$) i na grafech neobsahujících perfektní párování. **4 body**

Příklad 5 Zanalyzujte pravděpodobnostní algoritmus na CAR RENTAL problém (půjčení auta za cenu 1, koupě za cenu K, online dostávám zda ještě potřebuji auto). **4 body**

Příklad 6 Nalezněte co nejlepší pravděpodobnostní algoritmus na prohledávání přímky. **4 body**