Přednáška 9, 28. dubna 2014

Věta (Peano, 1886). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je okolí bodu (t_0, y_0) a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom má úloha*

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{rcl} y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t) & = & f(t, y(t)) \end{array} \right.$$

lokální (ne nutně jednoznačné) řešení: existuje $\delta > 0$ a taková funkce $y : I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, že (i) $y(t_0) = y_0$, (ii) $(t, y(t)) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a (iii) $y(t)$ má na I první derivaci a pro každé $t \in I$ platí rovnost $y'(t) = f(t, y(t))$.

Peanova věta rozšiřuje výsledek z MAII, že každá spojitá funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je interval, má primitivní funkci. To můžeme chápat jako řešení úlohy $y(t_0) = y_0, y'(t) = f(t)$ (f nezávisí na druhé proměnné).

Důkaz Peanovy věty využívá následující charakterizaci kompaktních podmnožin v prostoru spojitých funkcí se supremovou metrikou. (Uzavřenost je zřejmě nutná podmínka. Jak jsme si ukazovali v MAIII, přidání omezenosti, které stačí pro euklidovské prostory, pro funkce nestačí.)

Věta (Arzelà a Askoli, 1895). *Nechť $I = [a, b]$ je kompaktní interval. Množina funkcí $M \subset C(I)$ spojitých na I je kompaktní v supremové metrice, právě když je uzavřená a funkce v M jsou stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité, to jest*

1. *existuje $c > 0$, že pro každou $f \in M$ a každé $x \in I$ platí $|f(x)| < c$ a*
2. *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každou $f \in M$ a pro každé dva body $x, y \in I$ s $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Důkaz. Implikaci $\Rightarrow$ (tedy: když M není uzavřená nebo není stejně omezená nebo není stejně stejnoměrně spojitá, pak není kompaktní) necháme jako domácí cvičení. Dokážeme implikaci $\Leftarrow$. Předpokládáme, že množina funkcí M je uzavřená, stejně omezená a stejně stejnoměrně spojitá. Nechť $(f_n) \subset M$ je libovolná posloupnost funkcí. Spočetnou množinu zlomků v I seřadíme do posloupnosti

$$\mathbb{Q} \cap I = (q_1, q_2, \dots)$$

a sestrojíme takovou posloupnost vnořených podposloupností

$$(f_n) = (f_{0,n})_n \supset (f_{1,n})_n \supset (f_{2,n})_n \supset (f_{3,n})_n \supset \dots ,$$

že pro $j = 1, 2, \ldots$ je $(f_{j,n})_n$ podposloupností $(f_{j-1,n})_n$ a posloupnost $(f_{j,n}(q_j))_n \subset \mathbb{R}$ je konvergentní. Postupujeme indukcí: pokud už je $(f_{j,n})_n$ definovaná, vezmeme posloupnost hodnot $(f_{j,n}(q_{j+1}))_n \subset \mathbb{R}$ a z ní, protože podle předpokladu o M jde o omezenou posloupnost reálných čísel, vybereme (podle věty z MAI) konvergentní podposloupnost. Té odpovídá hledaná následující posloupnost $(f_{j+1,n})_n$. Všimněte si, že $(f_{j,n}(x))_n \subset \mathbb{R}$ je konvergentní na každém z j zlomků $x = q_1, q_2, \ldots, q_j$. Vezmeme diagonální posloupnost

$$(g_n) := (f_{n,n}) \ .$$

Pro každé $j = 1, 2, \ldots$ je od j-tého členu dále vybraná z $(f_{j,n})_n$, takže $(g_n(q))$ konverguje pro každý zlomek q z I.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že (g_n) splňuje na I stejnoměrnou Cauchyho podmínku. Takže (podle věty z MAII) konverguje v supremové metrice k funkci g, která díky uzavřenosti M leží v M. V dané posloupnosti funkcí $(f_n) \subset M$ jsme tak nalezli konvergentní podposloupnost (g_n). Vezmeme $\delta > 0$ odpovídající $\varepsilon/3$ podle předpokladu o stejné stejnoměrné spojitosti M a zvolíme nějaké dělení $a < p_1 < p_2 < \cdots < p_t < b$ intervalu I zlomky $p_1, p_2, \ldots, p_t$ na podintervaly délky menší než δ. Protože každá z t posloupností $(g_n(p_j))_n$, $j = 1, 2, \ldots, t$, konverguje, je cauchyovská a existuje n_0, že pro každé indexy $m, n > n_0$ a $j = 1, 2, \ldots, t$ je $|g_m(p_j) - g_n(p_j)| < \varepsilon/3$. Nechť $x \in I$ je libovolné číslo. Vezmeme zlomek p_j, že $|x - p_j| < \delta$. Pro každé $m, n > n_0$ pak skutečně máme

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\le |g_m(x) - g_m(p_j)| + |g_m(p_j) - g_n(p_j)| + |g_n(p_j) - g_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(první a třetí odhad je z volby δ a p_j, druhý z cauchyovskosti $(g_n(p_j))_n$). □

Věta a uvedený důkaz fungují i v obecnější situaci, kdy místo $C(I)$ vezmeme metr. prostor spojitých zobrazení z kompaktního metrického prostoru do úplného metrického prostoru (se supremovou metrikou) a podmínku stejné omezenosti nahradíme totální omezeností (pro každé $\varepsilon > 0$ má množina všech hodnot všech funkcí z M konečnou ε-síť).

Důkaz Peanovy věty. Nejprve ukážeme, že stačí nalézt řešení každé úlohy (P) jen vpravo od t_0, tj. řešení $y(t)$ definované jen na intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$. Odtud plyne existence řešení na celém okolí t_0, protože řešení $y_1(t)$ s $t \in [-t_0, -t_0+\delta]$

vpravo od $-t_0$ úlohy

$$y(-t_0) = y_0,\ y'(t) = -f(-t, y(t))$$

dává řešení úlohy (P) vlevo od t_0: je to funkce $y_2(t) := y_1(-t)$ s $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, protože $y_2(t_0) = y_1(-t_0) = y_0$ a $y_2'(t) = -y_1'(-t) = -(-f(-(-t), y_1(-t)) = f(t, y_2(t))$ (zde se dá pěkně zamotat do znamének, zejména, pokud se každá ze zúčastněných funkcí označí jen jako $y(t)$). Obě „poloviční“ řešení dohromady dávají řešení úlohy (P) na oboustranném okolí bodu t_0.

Nechť je tedy dána spojitá funkce

$$f:\ [t_0, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R},\ a, b > 0\ .$$

Ukážeme, že existuje $c > 0$ a funkce $y:\ [t_0, t_0 + c] \to \mathbb{R}$, která řeší úlohu (P) (jen vpravo od t_0, což ale, jak už víme, stačí). Položíme

$$c = \min(a, b/L) \ \text{ a } \ I = [t_0, t_0 + c]\ ,$$

kde $L > 0$ je libovolná horní mez hodnot $|f(x, y)|$, $t_0 \le x \le t_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b$ (f je spojitá funkce na kompaktní množině, takže omezená). Uvážíme množinu funkcí

$$\mathcal{A} = \{\gamma:\ I \to \mathbb{R} \mid \gamma(t_0) = y_0,\ r, s \in I \Rightarrow |\gamma(r) - \gamma(s)| \le L|r - s|\}$$

— funkce v $\mathcal{A}$ splňují počáteční podmínku a jsou lipschitzovské s konstantou L. Z definice množiny $\mathcal{A}$ není těžké odvodit, že $\mathcal{A} \subset C(I)$, $\mathcal{A}$ je uzavřená, stejně omezená a stejně stejnoměrně spojitá. Podle A.–A. věty to tedy je kompaktní podmnožina $C(I)$. Každé spojité zobrazení z $\mathcal{A}$ do (euklidovského prostoru) $\mathbb{R}$ tedy nabývá minimum a maximum. Vezmeme zobrazení

$$F:\ \mathcal{A} \to [0, +\infty),\ F(\gamma) = \min_{t \in I} \left| \gamma(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \right|\ .$$

(Definice c a $\mathcal{A}$ zaručují, že pro každé $s \in I$ leží $(s, \gamma(s))$ v definičním oboru funkce f. Teď se zdá, že by pro tento účel stačila jakákoli konstanta $L > 0$. Později ale budeme potřebovat, aby L majorizovala f.) F měří, jak daleko má $\gamma(t)$ k tomu, aby na I řešila úlohu (P). Když totiž $F(\gamma) = 0$, je $\gamma(t_0) = y_0$ (pro $t = t_0$ je integrál vždy nulový) a vzhledem ke $\gamma(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds = 0$, $t \in I$, zderivování podle t díky jedné ze dvou Základních vět analýzy (viz MAII) dává

$$\gamma'(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \right)' = f(t, \gamma(t))\ .$$

Takže $F(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma$ je na I řešením úlohy (P). Ukážeme dále, že F je spojité zobrazení. Nechť $d(\cdot,\cdot)$ je supremová metrika na $C(I)$, $\gamma, \delta \in \mathcal{A}$ a $v_\gamma(t)$, resp. $v_\delta(t)$, označuje funkci uvnitř absolutní hodnoty, jejíž extrém dává hodnotu $F(\gamma)$, resp. $F(\delta)$. Pak

$$\begin{aligned} d(v_\gamma, v_\delta) &\leq d(\gamma,\delta) + \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,\gamma(s)) - f(s,\delta(s)))\, ds \right| \\ &\leq d(\gamma,\delta) + c \cdot d(f(\cdot,\gamma(\cdot)), f(\cdot,\delta(\cdot)))\ . \end{aligned}$$

Protože f je na svém kompaktním definičním oboru stejnoměrně spojitá, pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s $\delta \leq \varepsilon$, že $d(\gamma,\delta) < \delta$ zaručuje, že $d(f(\cdot,\gamma(\cdot)), f(\cdot,\delta(\cdot))) < \varepsilon$. Takže $d(\gamma,\delta) < \delta$ zaručuje, že

$$d(v_\gamma, v_\delta) \leq \delta + c\varepsilon \leq (1+c)\varepsilon$$

a tedy i

$$\begin{aligned} |F(\gamma) - F(\delta)| &= |\min_{t\in I} |v_\gamma(t)| - \min_{t\in I} |v_\delta(t)|| \leq d(|v_\gamma|, |v_\delta|) \leq d(v_\gamma, v_\delta) \\ &\leq (1+c)\varepsilon \end{aligned}$$

(zdůvodněte první a druhou nerovnost ve výpočtu). Spojitost F je dokázána.

Teď už víme, že F na nějaké funkci $\varphi \in \mathcal{A}$ nabývá nejmenší a nezápornou hodnotu, a potřebujeme dokázat, že $F(\varphi) = 0$. K tomu stačí nalézt posloupnost funkcí $\gamma_k \in \mathcal{A}$, že pro $k \to \infty$ máme $F(\gamma_k) \to 0$. Což je nejzajímavější část důkazu. Vezmeme $k \in \mathbb{N}$ a $\gamma_k = \gamma_k(t) \in C(I)$ definujeme jako jednoznačné řešení úlohy

$$\text{(Z)} \left\{ \begin{array}{lcl} y(t) &=& y_0 \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + c/k] \\ y'(t) &=& f(t - c/k, y(t - c/k)) \text{ pro } t \in (t_0 + c/k, t_0 + c]\ . \end{array} \right.$$

Zde „Z“ znamená *zpoždění* — hodnota derivace y' vlevo se počítá z hodnot funkcí f a y vpravo zpožděných o k-tinu trvání časového intervalu I. Tento interval rozdělíme na podintervaly $I_1 = [t_0, t_0 + c/k], I_2 = (t_0 + c/k, t_0 + 2c/k], \ldots, I_k = (t_0 + (k-1)c/k, t_0 + c]$ a indukcí přes $j = 1, 2, \ldots, k$ ukážeme, že (Z) má jednoznačné spojité řešení $\gamma_k(t)$. Na I_1 je γ_k podle (Z) konstantně y_0. Je-li již γ_k definovaná na $I_1, \ldots, I_j$, $1 \leq j < k$, je podle druhé části (Z) jednoznačně určena i na I_{j+1} jako ta primitivní funkce

$$\gamma_k(t) = \int f(t - c/k, \gamma_k(t - c/k)),\ t \in I_{j+1}\ ,$$

která spojitě navazuje na hodnoty na I_j. Takže je γ_k jednoznačně určena na celém intervalu I. Souhrně platí, že

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} y_0 \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + c/k] \\ y_0 + \int_{t_0}^{t-c/k} f(s, \gamma_k(s))\, ds \text{ pro } t \in (t_0 + c/k, t_0 + c] \end{cases}$$

(stačí zderivovat podle t). Odtud se lehce vidí, že $\gamma_k \in \mathcal{A}$ (ověřte; zde je třeba, aby konstanta lipschitzovskosti L majorizovala f). Tedy (značení $v_{\gamma_k}(t)$ má význam zavedený výše) pro $t \in I_1$ je

$$|v_{\gamma_k}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds \right| \leq \frac{Lc}{k}$$

(na I_1 se první dva členy ve $v_{\gamma_k}(t)$ odečtou a $\int$ odhadneme ML odhadem) a pro $t \in I_2 \cup \cdots \cup I_k = (t_0 + c/k, t_0 + c]$ je rovněž

$$|v_{\gamma_k}(t)| = \left| \gamma_k(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma_k(s))\, ds \right| = \left| \int_{t-c/k}^{t} f(s, \gamma_k(s))\, ds \right| \leq \frac{Lc}{k}$$

(podle hořejšího vyjádření $\gamma_k(t)$ integrálem se integrály odečtou a výsledný $\int$ opět odhadneme ML odhadem). Takže

$$0 \leq F(\gamma_k) = \min_{t \in I} |v_{\gamma_k}(t)| \leq \frac{Lc}{k}$$

a $\lim_{k \to \infty} F(\gamma_k) = 0$, jak jsme potřebovali. □

Důkaz je převzat z preprintu [2], kde je i řada dalších zajímavostí o Peanově větě. Giuseppe Peano (1858–1932), známý zaxiomatizováním přirozených čísel, ji dokázal v [1]. O Arzelově–Ascoliho větě viz [3].

Reference

[1] G. Peano, Sull integrabilità della equazioni differenziali di primo ordine, *Atti. Acad. Sci. Torino* **21** (1886), 677–685.

[2] R. L. Pouso, Peano's existence theorem revisited, ArXiv:1202.1152v1, 19 str., 2012.

[3] Arzelà–Ascoli theorem, Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Arzelà–Ascoli_theorem