

Přednáška 8, 23. listopadu 2015

Po částech lineární spojitá funkce $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, pro níž existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ intervalu $[a, b]$, že na každém podintervalu $[a_i, a_{i+1}]$ je g lineární.

Tvrzení (graf spojité funkce je skoro lomená čára). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, buď spojitá funkce. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje po částech lineární spojitá funkce $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, že pro každé $x \in [a, b]$ je

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Úloha 5. □

Věta (Weierstrassova, o aproximaci polynomy). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, buď spojitá funkce. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $p(x)$, že pro každé $x \in [a, b]$ je

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Je obtížnější a nebudeme ho dělat. □

Dva předchozí výsledky lze zformulovat takto: pro každou spojitou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu existuje posloupnost po částech lineárních spojitých funkcí $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i posloupnost polynomů $p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, že $f_n \rightrightarrows f$ i $p_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Řady funkcí. Pro funkce $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ symbol nekonečné řady (nekonečného součtu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

chápeme stejně jako v případě číselných řad: jako způsob zápisu posloupnosti částečných součtů $(s_n) = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots)$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \text{ na } M$$

chápe jako $s_n = f_1 + \dots + f_n \rightrightarrows f$ na M . Podobně pro bodovou a lokální konvergenci a pro zápisy typu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{loc} \dots$.

Následující tři věty pro řady funkcí plynou snadno z odpovídajících vět pro posloupnosti funkcí.

Věta (výměna sumy a limity v bodě). Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro nějaké $\delta > 0$ máme $f_n : P(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $P(x_0, \delta)$.

Odtud plyne, že lokálně stejnoměrný součet spojitých funkcí je spojitá funkce.

Věta (výměna sumy a \int). Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a, b]$.

Věta (výměna sumy a d/dx). Necht $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce f_n má na (a, b) vlastní derivaci, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \xrightarrow{loc} g$ na (a, b) a že řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a, b)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{loc} f$ na (a, b) pro nějakou funkci $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a, b) .

Ze silnějšího předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows g$ na (a, b) plyne opět i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) .

Věta (kritéria stejnoměrné konvergence řad).

1. (Weierstrassovo kritérium) Necht' $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, jsou takové funkce, že řada nezáporných čísel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$

konverguje. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M .

2. (Důsledek Diniho věty) Jsou-li funkce $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a, b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow f$ na $[a, b]$.

Důkaz. 1. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ konverguje, splňuje Cauchyovu podmínku pro číselné řady a existuje n_0 , že pro každé $n \geq m > n_0$ máme

$$\sum_{i=m+1}^n \sup_{x \in M} |f_i(x)| < \varepsilon.$$

Pak ale pro každé $n \geq m > n_0$ a každé $x \in M$ máme

$$\begin{aligned} |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^n \sup_{x \in M} |f_i(x)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů $(f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots)$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a proto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M .

2. Plyne použitím Diniho věty (část 2 tvrzení z předminulé přednášky) na posloupnost částečných součtů. \square

Následující zobecnění kritérií pro neabsolutní konvergenci číselných řad na řady funkcí jsem na přednášce pouze zmínil a v úplnosti ho uvádím zde.

Věta (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Budte dány dvě posloupnosti funkcí $f_n, g_n : M \rightarrow \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \Rightarrow$ na M , když jsou splněny podmínky 1 nebo podmínky 2.*

1. (Abelovo kritérium) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M ; existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|g_n(x)| < c$ (říkáme, že posloupnost (g_n) je stejně omezená); pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.

2. (Dirichletovo kritérium) existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)| < c$ (říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty); $g_n \rightrightarrows 0$ na M ; pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.

Důkaz. Nebudeme dělat. □

Příklady. 1. Odvodíme jiným způsobem Taylorův rozvoj logaritmu. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows \text{ na } [-r, r] \text{ pro každé } 0 < r < 1.$$

Geometrickou řadu tedy můžeme (podle věty o výměně sumy a \int) integrovat člen po členu:

$$\begin{aligned} \log(1/(1-r)) &= \int_0^r \frac{dx}{1-x} = \int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Takže

$$\log(1/(1-r)) = r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \dots, \quad r \in (-1, 1).$$

2. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows \text{ na } [-R, R] \text{ pro každé } 0 < R.$$

Formálním zderivováním člen po členu dostáváme stejnou řadu, protože $(x^n/n!)' = x^{n-1}/(n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $(x^0/0!)' = 0$. Podle věty o výměně sumy a derivace se tedy funkce, jež je (lokálně stejnoměrným) součtem této řady na \mathbb{R} , rovná své vlastní derivaci. Tato funkce je ovšem e^x , takže jsme jiným způsobem dokázali základní vlastnost exponenciály $(e^x)' = e^x$.

3. Opět podle Weierstrassova kritéria,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos((32)^n \pi x) \rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R}.$$

Z věty o výměně sumy a limity v bodě plyne, že součtem řady je funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je všude spojitá. Na druhou stranu se dá ale dokázat (nebudeme to zde dělat), že tato funkce pro žádné $x \in \mathbb{R}$ nemá derivaci.

Mocninné řady. *Mocninnou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n .$$

Čísla $a_n \in \mathbb{R}$ jsou *koeficienty* a číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ je *střed* mocninné řady. Pro jednoduchost značení se v dalším omezíme na mocninné řady se středem v nule, tedy na řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Všechny výsledky se ale jednoduše přenášejí na řady s obecným středem.

Věta (o poloměru konvergence m. řady). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *buď mocninná řada a* $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ *(* R *je nezáporné reálné číslo nebo* $+\infty$ *)* *buď definováno vztahem*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} \quad (\text{kde } 1/0 = +\infty \text{ a } 1/+\infty = 0) .$$

Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ *s* $|x| < R$ *mocninná řada absolutně konverguje a pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *s* $|x| > R$ *mocninná řada diverguje.*

Důkaz. Nechť nejprve $0 < R < +\infty$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} .$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria z MA I vidíme, že mocninná řada pro $|x| < R$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Pokud $R = +\infty$, je $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0 .$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria mocninná řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud $R = 0$, je $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = +\infty .$$

Mocninná řada tedy pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diverguje □

Číslu R říkáme *poloměr konvergence mocninné řady* a intervalu $(-R, R)$ *interval konvergence*. Pro $R = 0$ je interval konvergence prázdný, ovšem každá mocninná řada konverguje pro $x = 0$ (k součtu a_0). Pro $|x| = R$, to jest $x = \pm R$, věta o konvergenci neříká nic (viz úloha 5).

Příklady poloměrů konvergence. Mocninné řady $\sum x^n$, $\sum (n^3 - n^2 + 1)x^n$ a $\sum x^n/n^2$ mají všechny poloměr konvergence rovný 1. Mocninná řada definiující exponenciálu, $\sum x^n/n!$, má poloměr konvergence rovný $+\infty$. Naopak

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

má poloměr konvergence rovný nule.

Tvrzení (lok. stejn. konvergence m. řady). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{loc}{\Rightarrow} na \quad (-R, R) .$$

Ekvivalentně řečeno (viz část 1 tvrzení z předminulé přednášky), mocninná řada stejnoměrně konverguje na každém kompaktním podintervalu intervalu konvergence.

Důkaz. Stačí se omezit na kompaktní podintervaly $[-S, S]$, kde $0 < S < R$. Na $[-S, S]$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n x^n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^n .$$

Cauchyovo odmocninové kritérium opět dává konvergenci této číselné řady (vzhledem k $\limsup |a_n S^n|^{1/n} = S/R < 1$), takže podle Weierstrassova kritéria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow na \quad [-S, S]$. □

Úlohy

1. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow na \quad M$, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \Rightarrow na \quad M$.

2. Ano nebo ne: když $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M podle Weierstrassova kritéria, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \Rightarrow$ na M podle Weierstrassova kritéria.
3. Platí následující obrácení Weierstrassova kritéria? Když $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je taková posloupnost funkcí, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = +\infty$, potom řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nekonverguje na \mathbb{R} stejnoměrně.
4. Ano nebo ne: existují dvě mocninné řady $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ lišící se jen v konečně mnoha koeficientech, které mají různé poloměry konvergence.
5. Dokažte tvrzení o aproximaci grafu spojitě funkce lomenou čarou. Návod: funkce spojitá na kompaktním intervalu je na něm stejnoměrně spojitá.
6. Uveďte 4 příklady mocninných řad $\sum a_n x^n$ s poloměrem konvergence R , $0 < R < +\infty$, odpovídající čtyřem možnostem (ne)konvergence ve dvou bodech $x = -R$ a $x = R$.
7. Nechtě $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ jsou mocninné řady s poloměry konvergence R a S , a $\sum (a_n + b_n)x^n$ má poloměr konvergence T . Jaká platí nerovnost mezi čísly R , S a T ?
8. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Jak to je s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence?
 - (a) $\sum_{n \geq 1} x^n/n$.
 - (b) $\sum_{n \geq 0} 4^n x^{2n}$.
 - (c) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n2^n}$.