Přednáška 7, 16. listopadu 2015

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy máme n_0, že $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0$ a každé $x \in M$. Pro každé $m, n > n_0$ a $x \in M$ tak (díky trojúhelníkové nerovnosti) máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ .$$

Je tedy splněna B.–C. podmínka.

Opačnou implikaci $\Leftarrow$ jsme fakticky dokázali již na minulé přednášce. Nechť posloupnost funkcí (f_n) splňuje B.–C. podmínku. To znamená, že je cauchyovská v supremové metrice, a v tvrzení na předchozí přednásce jsme dokázali, že (f_n) v supremové metrice konverguje k nějaké funkci f, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Bolzanova–Cauchyova podmínka nám umožňuje testovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti (f_n) bez přítomnosti (a znalosti) limitní funkce f. Když je splněna, můžeme a budeme psát $f_n \rightrightarrows$ na M, resp. $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na M. Poznamenejme ještě, že limitní funkce je samozřejmě určena jednoznačně. Když tedy odněkud víme, že $f_n \to f$ na M a současně podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky víme, že $f_n \rightrightarrows$ na M, automaticky dostáváme $f_n \rightrightarrows f$ na M, a podobně pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Řekneme, že bodová konvergence $f_n \to f$ na M je *monotónní*, když pro každý bod $a \in M$ je posloupnost čísel $(f_n(a))$ neklesající nebo když pro každý bod $a \in M$ je tato posloupnost nerostoucí.

Tvrzení (situace, kdy $\overset{loc}{\rightrightarrows} \Rightarrow \rightrightarrows$ a $\to \Rightarrow \rightrightarrows$). *Platí následující.*

1. *Když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M, potom $f_n \rightrightarrows f$ na každé kompaktní podmnožině $N \subset M$.*
2. *(Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ na kompaktní množině M, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M.*

Důkaz. 1. Pro $x \in M$ označíme jako $U_x \subset M$ okolí bodu x, na němž $f_n \rightrightarrows f$. Protože N je kompaktní, je pokrytá konečně mnoha okolími U_x: $N \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Pro dané ε pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ máme index n_i, že pro každé $n \ge n_i$ a $x \in U_{x_i}$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Je jasné, že pro $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$ máme $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $x \in U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k} \supset N$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na N.

2. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Množina

$$I_n = \{x \in M \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

je otevřená (v M) díky spojitosti fukcí f_n i f. Dále $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ díky monotonii konvergence $f_n \to f$ na M. A také pro každý bod $a \in M$ existuje index n, že $a \in I_n$, vzhledem k $f_n \to f$ na M. Množiny $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tedy tvoří otevřené pokrytí M. To má díky kompaktnosti M konečné podpokrytí: $M \subset I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \dots \cup I_{n_k}$. Ale $I_n \subset M$ a I_n tvoří monotónní systém, takže $M = I_{n_0}$ pro $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$, a vlastně $M = I_n$ pro každé $n \geq n_0$. To jest $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každý index $n \geq n_0$ a každý bod $x \in M$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Budeme se tedy zabývat otázkou, kdy platí následující rovnosti.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(x) &= \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'. \end{aligned}$$

Pro první dvě rovnosti následující věty říkají, že když jsou vnitřní výrazy ($\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, resp. $\int_a^b f_n$ a $\lim_{n\to\infty} f_n$) definované a konvergence posloupnosti funkcí v nich je stejnoměrná, jsou i vnější výrazy definované a mají stejnou hodnotu. Třetí věta o derivování říká, že když je levá strana definovaná, konvergence posloupnosti derivací je stejnoměrná a posloupnost funkcí konverguje v alespoň jednom bodě, je i pravá strana definovaná, konvergence posloupnosti funkcí je stejnoměrná a obě strany se rovnají.

Věta (Mooreova–Osgoodova, výměna $\lim_{n\to\infty}$ a $\lim_{x\to x_0}$). *Nechť jsou funkce f_n a f definované na nějakém prstencovém okolí $M = P(x_0, \delta)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který může být i nevlastní, existují vlastní limity*

$$a_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x) \quad a \quad f_n \rightrightarrows f \quad na \quad P(x_0, \delta)\ .$$

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a rovnají se.

Důkaz. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, splňuje posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku: pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ platí pro každé $x \in M$ a každé $m, n > n_0$. Pro pevné indexy $m, n > n_0$ limitní přechod $x \to x_0$ dává nerovnost

$$|a_m - a_n| \le \varepsilon \, .$$

Posloupnost čísel (a_n) je tedy cauchyovská a podle věty z MA I má vlastní limitu $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \, .$$

Zbývá ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Vzdálenost $|f(x) - A|$ pro x blízké k x_0 odhadneme pomocí trojúhelníkové nerovnosti jako

$$|f(x) - A| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - A|}_{V_3} \, ,$$

což platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$.

Buď nyní dáno $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to A$ pro $n \to \infty$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $V_3 < \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, existuje n_1, že $n > n_1, x \in M \Rightarrow V_1 < \varepsilon/3$. Vezmeme $N \in \mathbb{N}$ větší než n_0 i n_1. Protože $\lim_{x\to x_0} f_N(x) = a_N$, existuje $\delta_0 > 0$ takové, že

$$x \in P(x_0, \delta_0) \Rightarrow |f_N(x) - a_N| < \varepsilon/3, \quad \text{to jest} \quad V_2 < \varepsilon/3 \, .$$

Pro toto δ_0 a $n = N$ nám hořejší nerovnost dává

$$x \in P(x_0, \delta_0) \Rightarrow |f(x) - A| \le V_1 + V_2 + V_3 < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \, .$$

Takže $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. □

Není-li konvergence stejnoměrná, nelze obecně limity $\lim_{n\to\infty}$ a $\lim_{x\to x_0}$ vyměnit beze změny výsledku, jak jsme už viděli v příkladu s funkcemi $f_n(x) = x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \text{ale} \quad \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \, .$$

Důsledek. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I, přičemž funkce f_n jsou na I spojité. Potom i limitní funkce f je na I spojitá.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$ je libovolný bod intervalu I, řekněme vnitřní (pro krajní body je postup s jednostrannými limitami prakticky stejný). Podle předchozí věty záměna pořadí limit nemění výsledek a máme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \ ,$$

takže f je spojitá v bodě x_0. (Rozmyslete si, proč přesně platí každá z předchozích čtyř rovností — úloha 3.) $\square$

Lokálně stejnoměrná (a tím spíše stejnoměrná) konvergence tedy zachovává spojitost funkce.

Věta (výměna $\lim_{n \to \infty}$ a $\int$). *Nechť funkce $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, mají na kompaktním intervalu $[a,b]$ Riemanův integrál a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Pak i $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a*

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \ .$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé $x \in [a,b]$ máme

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \ .$$

Nechť $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, je libovolné dělení intervalu $[a,b]$ a $n > n_0$ je pevné. Pak

$$\begin{aligned} s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) \\ &\geq \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f_n(x) - \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \ \text{(úloha 4)} \\ &= s(f_n, D) - \varepsilon(b-a) \ . \end{aligned}$$

Stejně se dokáže nerovnost $S(f,D) \leq S(f_n,D) + \varepsilon(b-a)$ pro horní součty. Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé dělení D intervalu $[a,b]$ je

$$s(f_n, D) - \varepsilon < s(f,D) \leq S(f,D) < S(f_n,D) + \varepsilon \ .$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme odpovídající n_0. Nechť $n > n_0$ je libovolné, ale pevné. Protože f_n má na $[a, b]$ Riemannův integrál, můžeme vzít takové dělení D_0, že $0 \le S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) < \varepsilon$. Pak

$$\begin{aligned} 0 \le S(f, D_0) - s(f, D_0) &\le S(f_n, D_0) + \varepsilon - (s(f_n, D_0) - \varepsilon) \\ &= S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) + 2\varepsilon \\ &< 3\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Podle věty z MA II má proto funkce f na $[a, b]$ Riemannův integrál. Protože $\int_a^b f$ leží v intervalu $[s(f, D_0), S(f, D_0)]$ obsaženém v intervalu $[s(f_n, D_0) - \varepsilon, S(f_n, D_0) + \varepsilon]$ o délce 3ε a $\int_a^b f_n$ leží v intervalu $[s(f_n, D_0), S(f_n, D_0)]$ také obsaženém v $[s(f_n, D_0) - \varepsilon, S(f_n, D_0) + \varepsilon]$, máme

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| < 3\varepsilon \ .$$

Dokázali jsme tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon \ .$$

Tudíž

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ .$$

□

Než se pustíme do záměny $\lim_{n\to\infty}$ a derivování, podíváme se na tři příklady.

Příklad 1. Pro posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

a $M = \mathbb{R}$ máme $f_n \rightrightarrows 0$ na M. Posloupnost derivací $f_n'(x) = \cos(nx)$ však nekonverguje na M ani bodově, například pro $x = (2k + 1)\pi$ je posloupnost jejich hodnot $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

Příklad 2. Posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

na množině $M = \mathbb{R}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$: pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\sqrt{x^2} \le f_n(x) \le \sqrt{x^2} + \frac{1}{n}\,.$$

Každá funkce f_n má na M vlastní derivaci (rovnou $x(x^2 + 1/n^2)^{-1/2}$), ale limitní funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě nula.

Příklad 3. Nechť $f_n(x) = n$ a $M = \mathbb{R}$. Pak $f_n' = 0 \rightrightarrows 0$ na M, ale posloupnost (f_n) nekonverguje bodově pro žádné $x \in M$.

Vidíme, že stejnoměrná konvergence posloupnosti (f_n) neříká nic o konvergenci derivací (f_n') ani o možnosti záměny pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a derivování — posloupnost derivací nemusí konvergovat ani bodově nebo limitní funkce f nemusí mít vůbec derivaci. Naopak, třetí příklad ukazuje, že stejnoměrná konvergence derivací také nezaručuje konvergenci původní posloupnosti funkcí (to se však spraví, když (f_n) konverguje alespoň v jednom bodě). Důkaz následující věty jsem na přednášce nepřednášel, ale zde pro úplnost ho uvádím.

Věta (výměna $\lim_{n\to\infty}$ a d/dx). *Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce, $-\infty < a < b < +\infty$, každá f_n má na (a,b) vlastní derivaci, $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b) a posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$. Potom $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b).*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Pak pomocí Mooreovy–Osgoodovy věty spočteme, že limitní funkce f má derivaci a ta se rovná g. Nakonec ověříme předpoklady užití této věty.

Nechť $x_1 \in (a,b)$ je libovolný bod. Máme nalézt jeho okolí U takové, že $f_n \rightrightarrows$ na $(a,b) \cap U$. Stačí dokázat, že $f_n \rightrightarrows$ na $[c,d]$ pro libovolný kompaktní interval $[c,d] \subset (a,b)$ obsahující „záchytný“ bod x_0 — takový interval lze totiž zvolit tak, že oba body x_0 a x_1 leží v (c,d), a pak $U = (c,d)$.

Nechť tedy interval $[c,d] \subset (a,b)$ splňuje, že $x_0, x_1 \in (c,d)$. Ověříme, že posloupnost (f_n) splňuje na $[c,d]$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ a $x \in [c,d]$ máme nerovnost

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \underbrace{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))|}_{V_1} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{V_2}\,.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje, existuje n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow V_2 < \varepsilon$. Výraz V_1 odhadneme Lagrangeovou větou o střední hodnotě, použitou na funkci $f_m - f_n$ na intervalu s krajními body x_0 a x:

$$V_1 = |(x - x_0) \cdot (f_m - f_n)'(\zeta)| = |x - x_0| \cdot |f'_m(\zeta) - f'_n(\zeta)| \ ,$$

kde ζ leží mezi body x_0 a x (bod ζ obecně závisí na m, n i na x, ale díky $f'_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ nám to nevadí). Protože $f'_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b), máme (podle části 1 tvrzení z minulé přednášky) $f'_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Existuje tedy n_1, že pro každé $m, n > n_1$ a každé $x \in [c, d]$ platí $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$m, n > n_1,\ x \in [c, d] \Rightarrow V_1 < (d - c)\varepsilon < (b - a)\varepsilon \ .$$

Celkem pro $m, n > \max(n_0, n_1)$ a každé $x \in [c, d]$ máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq V_1 + V_2 < (b - a)\varepsilon + \varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon \ .$$

Posloupnost (f_n) tak na $[c, d]$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a $f_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Limitní funkci označíme jako f, máme $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b).

Nyní spočteme derivaci funkce f v libovolném bodě $x_1 \in (a, b)$ a ukážeme, že $f'(x_1) = g(x_1)$. Vskutku, podle M.–O. věty máme

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_1} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} = \lim_{n \to \infty} f'_n(x_1) \\ &= g(x_1) \ . \end{aligned}$$

M.–O. větu jsme použili při záměně pořadí limit ve třetí rovnosti. Je ale třeba ověřit, že její předpoklady jsou splněny. Větu jsme použili pro bod x_1 a posloupnost funkcí

$$h_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \ .$$

Funkce h_n jsou definované na nějakém prstencovém okolí $P(x_1, \delta)$ bodu x_1 a vlastní limity $\lim_{x \to x_1} h_n(x)$ existují podle předpokladu a rovnají se $f'_n(x_1)$. Zbývá ukázat, že pro nějaké $\delta_0 > 0$ máme $h_n \rightrightarrows h$ na $P(x_1, \delta_0)$, kde

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \ .$$

Je jasné, že $h_n \to h$ na $P(x_1, \delta)$ (protože $f_n \to f$ na $U(x_1, \delta)$). Stačí ukázat, že na nějakém $P(x_1, \delta_0)$ posloupnost (h_n) splňuje B.–C. podmínku.

Zvolme $\delta_0 > 0$ tak malé, že $\delta_0 < \delta$ a že $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$ (což lze podle předpokladu). Podle L. věty o střední hodnotě pro každé $x \in P(x_1, \delta_0)$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$ existuje takový bod λ ležící mezi x_1 a x, že

$$\begin{aligned} |h_m(x) - h_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_1) - f_n(x_1))}{x - x_1} \right| \\ &= |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)| \,. \end{aligned}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$, existuje n_0, že

$$m, n > n_0,\ x \in P(x_1, \delta_0) \Rightarrow |h_m(x) - h_n(x)| = |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)| < \varepsilon \,.$$

B.–C. podmínka je tedy pro posloupnost (h_n) na prstencovém okolí $P(x_1, \delta_0)$ splněna. $\square$

Při silnějším předpokladu $f_n' \rightrightarrows g$ na (a, b) můžeme místo na $[c, d]$ pracovat na celém intervalu (a, b) a dostaneme silnější závěr, že i $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b).

Úlohy

1. Nechť $f_n \to f$ na M, přičemž každá funkce f_n je na M omezená. Je f omezená?

2. Táž otázka v případě stejnoměrné konvergence.

3. Zdůvodněte podrobně platnost každé ze čtyř rovností ve výpočtu dokazujícím spojitost stejnoměrné limity spojitých funkcí.

4. Proč platí vyznačená nerovnost v důkazu záměny limity a integrálu?

5. Ano nebo ne: když $f_n \rightrightarrows f$ na A a $f_n \rightrightarrows f$ na B, potom $f_n \rightrightarrows f$ na $A \cup B$.

6. Nechť $f_n \to f$ na M, ale $f_n \not\rightrightarrows f$ na M. Existuje maximální (tj. dále v inkluzi nezvětšitelná) podmnožina $A \subset M$, že $f_n \rightrightarrows f$ na A?

7. Je pravda, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx\ ,$$

když $f_n(x) = nx(1-x)^n$?

8. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\ dx\ .$$

9. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + x/n)^n\ dx\ .$$