Přednáška 6, 2. 4. 2007

Důkaz kompoziční formule pro EGF. $b_0 = 0$

$\mathcal{A}$ má EGF $A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$, $\mathcal{B}$ má $B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}$

$C \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$ vypadá tak, že $C = (A; B_1, \dots, B_k)$ *), $V_e(C) = \{1, 2, \dots, n\}$, vrcholové množiny $\mathcal{B}$-struktur $B_1, \dots, B_k$ tvoří rozklad množiny $[n]$ a A je $\mathcal{A}$-struktura na množině bloků rozkladu, reprezentované např. jejich minimálními prvky. Takže $c_n = \#$ voleb C na množině $[n]$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \# \text{rozkladů } [n] = X_1 \dot\cup \dots \dot\cup X_k \;\Big|\; \text{s } |X_i| = n_i \cdot \prod_{i=1}^{k} \#\text{voleb } \mathcal{B}\text{-str. na } X_i$$

$$\cdot \underset{\text{na } \{\min X_1, \dots, \min X_k\}}{\#\text{voleb } \mathcal{A}\text{-str.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\text{chceme } \{X_1, \dots, X_k\}, \text{ ne } (X_1, \dots, X_k)}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} \prod_{i=1}^{k} b_{n_i} \cdot a_k \cdot \frac{1}{k!}.$$

---

*) Správně to zde i v minulé přednášce má být $C = (A; \{B_1, \dots, B_k\})$, protože nezáleží na pořadí $B_1, \dots, B_k$!!

Protože $b_0 = 0$, je jedno, zda sčítáme přes $n_i \geq 0$ nebo přes $n_i \geq 1$. Na druhou stranu,

$$[x^n]\, A(B(x)) = [x^n] \sum_{k \geq 0} \frac{a_k \left(\sum_{m \geq 0} \frac{b_m x^m}{m!} \right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{b_{n_1}}{n_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n_k}}{n_k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} b_{n_1} \cdots b_{n_k}.$$

Tedy opravdu $\frac{c_n}{n!} = [x^n]\, A(B(x))$, a tak

$C(x) = A(B(x))$. $\boxtimes$

Dopočítejme formuli pro $m_n = \#$ rozkladů $[n]$ na 2-prvkové bloky. Minule jsme viděli, že

$m_n = n!\,[x^n]\, e^{x^2/2!} = [x^n]\, e^{x^2/2}$. Odtud hned plyne, že

$$m_n = \begin{cases} 0 & \text{pro liché } n \text{ (triviálně)} \\ n! \cdot \frac{1}{m!\, 2^m} & \text{pro sudé } n = 2m. \end{cases}$$

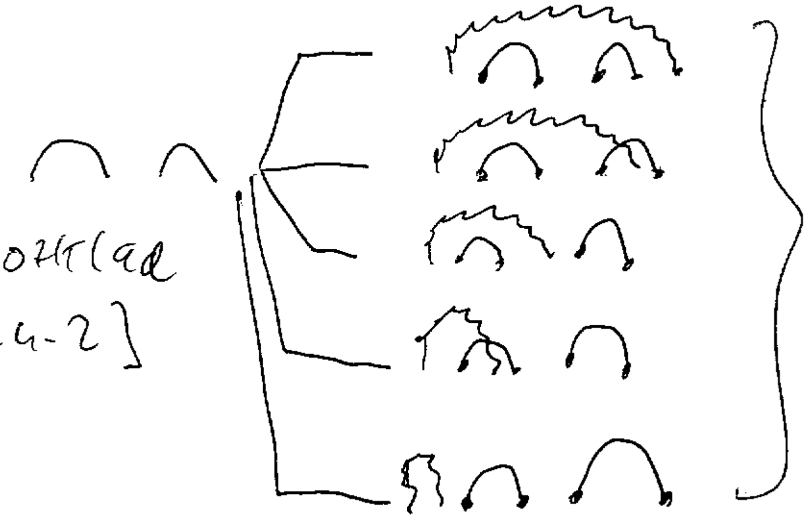
Pro sudé $n = 2m$ tak máme

$$m_n = \frac{n!}{2^m m!} = \frac{\cancel{2m}\cdot(2m-1)\cdot\cancel{(2m-2)}\cdots 3\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2m}\cdot\cancel{(2m-2)}\cdot\cancel{(2m-4)}\cdots\cancel{2}} =$$

$$= \underline{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1 =: (2m-1)!!}$$

To se dá dokázat i přímo indukcí bez použití EGF:

pro sudé n je $m_n = (n-1)\cdot m_{n-2}$ $(m_0 = 1)$, protože



rozklad $[n-2]$

dává $n-1$ nových rozkladů $[n]$.

Obecně pro $m(k,n) = \#$ rozkladů $[n]$ na k-prvkové bloky máme formuli

$$n = km \to m(k,n) = \frac{n!}{(k!)^m\, m!} = \frac{1}{m!}\binom{n}{\underbrace{k,k,\ldots,k}_{m\times}}$$

D. Pomocí EGF nebo přímo. $\triangleright$

Spočteme si ještě dva příklady na použití kompoziční formule pro EGF.

- Rekurence pro souvislé grafy

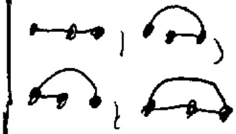
$a_n = \#$ souvislých grafů (bez násobných hran a bez smyček) na $[n]$.

$b_n = \#$ všech —— || —— $= 2^{\binom{n}{2}}$.

$a_0 = 0$

$a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = 4$:



$a_4 = ?, a_5 = ?, \ldots$

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n x^n}{n!}$$

Kompoziční, přesněji exponenciální, formule: $B(x) = e^{A(x)}$. Logaritmická derivace a vynásobení x dává (tj. aplikace operátoru $x \cdot \frac{d}{dx} \cdot \log$)

$$x \frac{B'}{B} = x A', \text{ tj. } \boxed{x \cdot B' = x A' \cdot B}.$$

Porovnání koeficientů u x^n na obou stranách:

$$\frac{b_n}{(n-1)!} = \sum_{q \geq 1}^{n} \frac{a_q}{(q-1)!} \cdot \frac{b_{n-q}}{(n-q)!} = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{(n-1)!} \binom{n-1}{q-1} a_q b_{n-q}$$

$$\rightsquigarrow a_n = b_n - \sum_{q=1}^{n-1} \binom{n-1}{q-1} a_q b_{n-q}$$

$$\boxed{a_n = 2^{\binom{n}{2}} - \sum_{q=1}^{n-1} \binom{n-1}{q-1} a_q 2^{\binom{n-q}{2}} \text{ pro } n \geq 1}$$

Takže $a_4 = 2^6 - \left(\binom{3}{0}\cdot 1\cdot 2^{\binom{3}{2}} + \binom{3}{1}\cdot 1\cdot 2^{\binom{2}{2}} + \binom{3}{2}\cdot 4\cdot 2^{\binom{1}{2}}\right)$

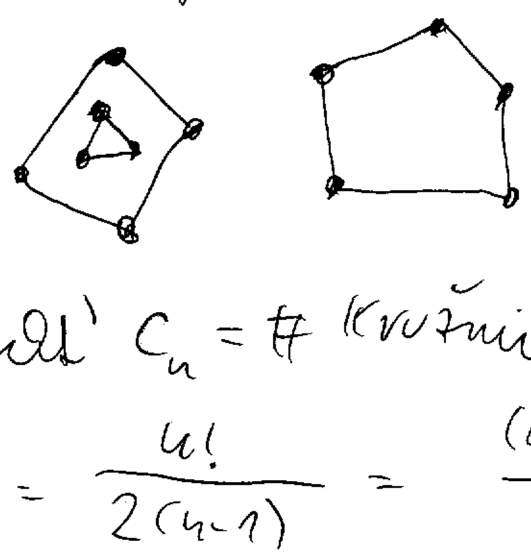
$= 64 - (8 + \cancel{4}\,6 + 12)$

$= \underline{38}.$

- <u>Rekurence pro 2-regulární grafy</u>

2-reg. graf na $[n]$ je graf bez násobných hran a smyček, jehož každý vrchol má stupeň 2.

$g_n = \#$ 2-reg. grafů, $K(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{g_n x^n}{n!}$. Podle exp. formule máme $K(x) = e^{C(x)}$, kde $C(x)$ je EGF počtu kružnic. Každý 2-reg. graf se totiž skládá z komponent, které jsou kružnice:



$c_0 = c_1 = c_2 = 0$

Nechť $c_n = \#$ kružnic na $[n]$. Máme

$c_n = \frac{n!}{2(n-1)} = \frac{(n-1)!}{2}$ pro $n \geq 3$. Tedy

$C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n x^n}{n!} = \sum_{n\geq 3} \frac{\frac{(n-1)!}{2} x^n}{n!} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right.$

$$\left(= \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2}\right)\right).$$

Takže $K(x) = e^{C(x)} = e^{\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2}\right)}$

$$= \frac{e^{-x/2 - x^2/4}}{\sqrt{1-x}}.$$

Což je efektní formule, ale pro odvození rekurence pro r_n je lepší vyjít z

$K(x) = e^{C(x)} = e^{\frac{1}{2}(x^3/3 + x^4/4 + \dots)}$ a opět aplikovat $x\cdot\frac{d}{dx}\cdot\log$: $\quad x\,\frac{K'}{K} = x\cdot C' = \frac{1}{2}(x^3 + x^4 + \dots)$

$$\boxed{x\cdot K' = \frac{1}{2}(x^3 + x^4 + \dots)\cdot K.}$$

Porovnání koef. u x^n dává

$$\cancel{\frac{r_n}{(n-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{r=3}^{n}\frac{r_{n-r}}{r!}.}\ \text{~~Tedy~~}$$

$$\cancel{r_n = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{r_3}{3!} + \frac{r_4}{4!} + \dots + \frac{r}{}\right)}$$

$$\frac{r_n}{(n-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{r=3}^{n}\frac{r_{n-r}}{(n-r)!} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-3}\frac{r_r}{r!}.\ \text{Tedy}$$

$$\boxed{r_n = \frac{(n-1)!}{2}\Big(\underbrace{\frac{r_0}{0!}}_{1} + \underbrace{\frac{r_1}{1!}}_{0} + \underbrace{\frac{r_2}{2!}}_{0} + \underbrace{\frac{r_3}{3!}}_{1/6} + \dots + \frac{r_{n-3}}{(n-3)!}\Big) \quad n \geq 3}$$

Například ~~Tedy~~

$$r_4 = \frac{(4-1)!}{2} = 3,\quad r_5 = \frac{(5-1)!}{2} = 12,$$

$$r_6 = \frac{(6-1)!}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\right) = 60(1+1/6) = 70, \dots$$

Ještě jeden příklad na kompoziční fuli

$s_n = \#$ surjekcí (zobrazení na) $f : [n] \to [m]$,

$1 \leq m \leq n$.

Patrně $s_n = \#$ uspořádaných rozkladů $(X_1, \dots, X_m)$ množiny $[n]$ na $\neq \emptyset$ bloky ($X_i = f^{-1}(i)$).

Takže kompoziční formule dává

$$\sum_{n \geq 0} \frac{s_n x^n}{n!} = A(B(x)) = \overbrace{\Big(\sum_{m \geq 0} \frac{m!\, x^m}{m!}\Big)}^{A(x)} \circ \overbrace{\Big(\sum_{r \geq 1} \frac{1 \cdot x^r}{r!}\Big)}^{B(x)}$$

Protože vnější A-str. je „být permutací“ (bloků) a vnitřní B-str. je „být neprázdnou množinou“.

$$= \frac{1}{1-x} \circ (e^x - 1) = \frac{1}{1-(e^x-1)} = \boxed{\frac{1}{2-e^x}}.$$