Přednáška 5, 26. 3. 2007

Kombinatorický význam skládání OGF

$v_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{N}_0$, $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $a_n = \#\{A \in \mathcal{A} : v_{\mathcal{A}}(A) = n\}$

$\mathcal{B}$, $v_{\mathcal{B}}$, b_n, $B(x)$; $b_0 = 0$.

$\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \{\underbrace{(A; B_1, \dots, B_k)}_{C} : A \in \mathcal{A},\ v_{\mathcal{A}}(A) = k,\ B_i \in \mathcal{B}\}$,

$v_{\mathcal{C}}(C) = \sum_{i=1}^{k} v_{\mathcal{B}}(B_i)$.

Složená struktura, vzniklá dosazením $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

$c_n = \#(C \in \mathcal{C} : v_{\mathcal{C}}(C) = n)$

$= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} a_k b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k}$, což se přesně rovná

koeficientu $[x^n] A(B(x)) = [x^n]\ a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + a_2(b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2 + \dots$

Tvrzení Složená struktura $\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B})$ má OGF rovnou $C(x) = A(B(x))$.

Příklady 1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, a, aa, aaa, \dots\}$

$\mathcal{B} = \{b, bb, bbb, \dots\}$, váha = délka

Pak $A(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, $B(x) = x + x^2 + \dots = \frac{x}{1-x}$,

takže $C(x) = A(B(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}}$

$\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \text{kompozice čísel } n \in \mathbb{N}_0}$

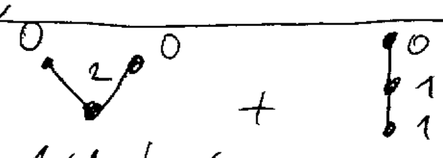
$= \frac{1-x}{1-2x} = 1 + \frac{x}{1-2x} =$

$= 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n$. # kompozic čísla n.

2. Počet košťat ve stromech

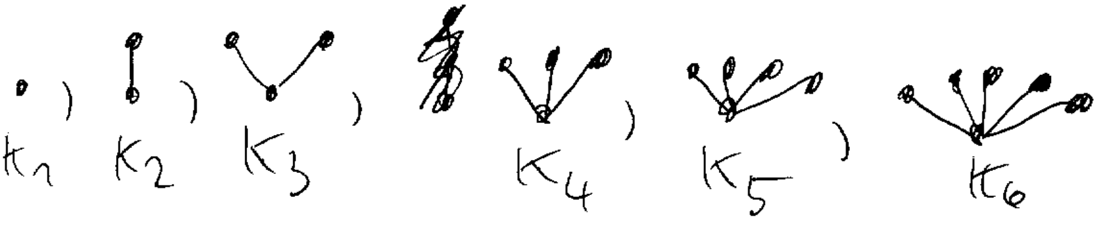
$\mathcal{T}(n)$ = (zakoř. rov.) stromy na n vrcholech, např. $\mathcal{T}(3) = \{$  $\}$. Pro $T \in \mathcal{T}(n)$ a $v \in V(T)$, nechť $d(T, v)$ je # dětí vrcholu v v T (tj. orientovaný stupeň vrcholu v).

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $$\underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}(n)} \sum_{v \in T}}_{k_n} 2^{d(T,v)} = \frac{4^{n-1} + \binom{2n-2}{n-1}}{2}$$

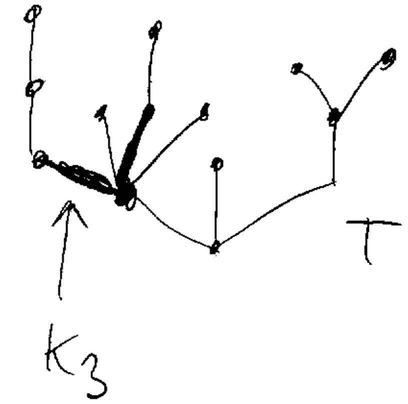
Např., pro $n = 3$,  $= 11 = \frac{4^2 + \binom{4}{2}}{2}$,

$1+1+4=6$ $\quad$ $1+2+2=5$

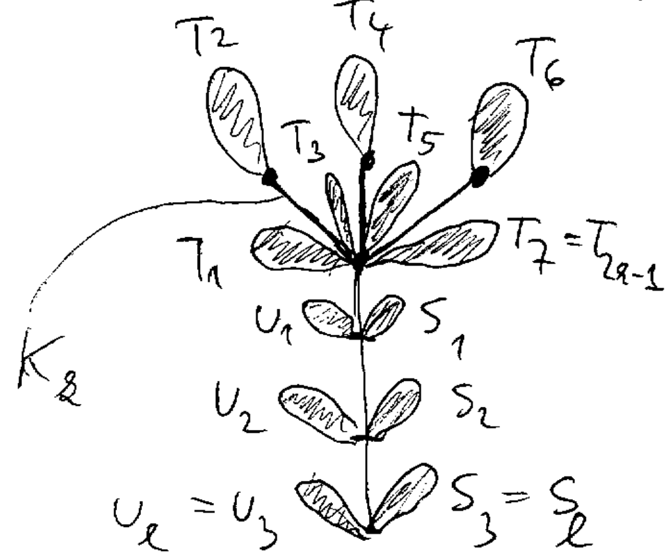
Důkaz. LS = počet vnoření některého z "košťat"

 $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \dots$ do

stromu s n vrcholy. Vnoření vypadá nějak takto:



Na druhou stranu je LS stejně tak rovna počtu rozšíření nějakého koštěte K_k na strom $T \in J(n)$:



Do K_k lze vložit do mezer u vrcholu $2k-1$ stromů T_i a pod K_k lze vložit l dvojic stromů U_i, S_i.

Takže $K(x) = \sum_{n \geq 1} k_n x^n = \sum_{l \geq 0} \left(\frac{C^2}{x}\right)^l \cdot \sum_{k \geq 1} x^k \left(\frac{C}{x}\right)^{2k-1}$,

kde $C = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) = \sum_{n \geq 1} |J(n)| x^n$ splňuje kv. rovnici $C^2 - C + x = 0$. Tedy

$$K(x) = \frac{1}{1 - C^2/x} \cdot \frac{x}{C} \cdot \frac{C^2/x}{1 - C^2/x} = \frac{x^2 C}{(x - C^2)^2} \overset{\text{kv. rov.}}{=}$$

$$= \frac{x^2 C}{(2x - C)^2} \underset{\text{kv. rov.}}{=} \frac{x^2 C}{4x^2 - 4xC + C - x} = \frac{x^2 C}{(1-4x)(C-x)}$$

$$\underset{\text{kv.rov.}}{=} \frac{x}{1-4x}\cdot\frac{x}{C} \underset{\text{kv.rov.}}{=} \frac{x}{1-4x}\,\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-4x}+\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1} 4^{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1}\binom{-1/2}{n-1}4^{n-1}(-1)^{n-1}x^n\right).$$

Protože $\binom{-1/2}{n-1}(-1)^{n-1}4^{n-1} = \dots = \binom{2n-2}{n-1}$, jak si každý sám spočte, dostáváme opravdu

$$k_n = [x^n]K(x) = \frac{1}{2}\left(4^{n-1}+\binom{2n-2}{n-1}\right). \qquad \boxtimes$$

Kombinatorický význam skládání EGF

$V_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to P_{fin}(\mathbb{N})$, $a_n = \#\{A\in\mathcal{A} : V_{\mathcal{A}}(A) = X\}$, kde $X\subset\mathbb{N}$, $|X|=n$, je libovolná (a_n závisí jen na $|X|$) a $A(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n x^n}{n!}$. $\mathcal{B}$, $V_{\mathcal{B}}$, b_n, $B(x)$ stejně, $b_0 = 0$.

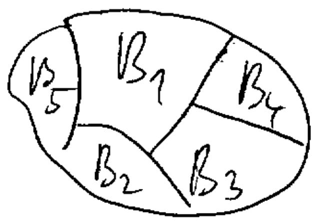
$\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \{\overbrace{(A; B_1,\dots,B_k)}^{C} : A\in\mathcal{A},\ B_i\in\mathcal{B}$, vrcholové množiny $V_{\mathcal{B}}(B_i)$ jsou po 2 disjunktní, $V_{\mathcal{A}}(A) = \{\min V_{\mathcal{B}}(B_1),\dots,\min V_{\mathcal{B}}(B_k)\}\}$. Klademe

$V_{\mathcal{C}}(C) = \bigcup_{i=1}^{k} V_{\mathcal{B}}(B_i)$.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ (kompoziční formule pro EGF) Složená struktura $\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B})$ má EGF rovnou $A(B(x))$.

D. Příště, teď se podíváme na pár příkladů. ⊠

Příklady 1. $\mathcal{A}$ = být množinou, pak $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ a $A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$. Pak

$\mathcal{C} =$  má EGF $C(x) = e^{B(x)}$.

(exponenciální formule)

2. $\mathcal{A}$ = být k-prvkovou množinou, $\mathcal{B}$ = být $\neq \emptyset$ množinou: $A(x) = \frac{x^k}{k!}$, $B(x) = e^x - 1$ a $C(x) = A(B(x)) = \frac{(e^x-1)^k}{k!}$ je EGF Stirlingových čísel $\sum_{n \geq 0} \frac{S(n,k)}{n!} x^n$.

3. $\mathcal{A}$ = být množinou, $\mathcal{B}$ = být k-prvkovou množinou: $A(x) = e^x$, $B(x) = \frac{x^k}{k!}$ a $C(x) = A(B(x)) = e^{x^k/k!}$ je EGF pro rozklady na k-prvkové bloky

4. $\mathcal{A}$ = být množinou, $\mathcal{B}$ = být $\neq \emptyset$ množinou:

$A(x) = e^x$, $B(x) = e^x - 1$ a $C(x) = A(B(x)) = e^{e^x - 1}$ je EGF Bellových čísel B_n počítajících všechny ~~B~~ rozklady n-prvkové množiny (na $\neq \emptyset$ bloky), tj.

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{B_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.}$$