Přednáška 5, 24. března 2014

Dokončíme důkaz Věty o křivce, čili kroku K2, že doplněk prosté křivky je souvislý.

Nejprve přesně definujeme operaci sjednocení dvou nakreslení grafů. Nechť M a N jsou polygonální rovinná nakreslení grafů $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$, daná přiřazeními $v \mapsto b_v, e \mapsto K_e$ a $w \mapsto b_w, f \mapsto K_f$. Tato dvě nakreslení sjednotíme tak, že výsledkem bude opět polygonální rovinné nakreslení, označené jako $M \cup N$, nějakého grafu a nic se nepřidá ani neubere v tom smyslu, že $a \in \mathbb{R}^2$ leží na nakreslení $M \cup N$, právě když a leží na M nebo na N. Uděláme to následovně. Nejprve M nahradíme nakreslením M' a N nahradíme N' tak, že do vrcholu každé lomené čáry reprezentující hranu umístíme nový vrchol (čímž dostaneme spoustu nových hran). Každá hrana je teď reprezentována úsečkou a grafy G a H jsou nahrazeny svými děleními G' a H' (dělení grafu vznikne opakovanou náhradou hrany cestou s novými vnitřními vrcholy). Úsečka u reprezentující hranu grafu G' ale stále může být protnuta úsečkami reprezentujícími hrany grafu H' a také na ní mohou ležet nějaké vrcholy z H'. Za všechny tyto body přidáme do G' nové vrcholy a nové hrany (které jsou reprezentovány úsečkami, na něž je u rozdělena novými vrcholy/body). To uděláme pro všechny hrany/úsečky grafu G' a analogicky totéž pro graf H'. Dostaneme tak nakreslení M'' a N'' grafů G'' a H'', jež jsou děleními grafů G' a H'. Ještě odstraníme případné duplicity vrcholů a hran (vrchol z G'' a vrchol z H'' mohou být reprezentovány týmž bodem a podobně pro hrany; tyto dva vrcholy pak sloučíme do jediného, což odstraní i možnou duplicitu hran) a nakreslení M'' a N'' vezmeme dohromady. Vzniklé nakreslení je nakreslení $M \cup N$ s požadovanými vlastnostmi. Hrany jsou v něm reprezentovány dokonce pouze úsečkami.

Všimněme si, že když grafy G a H jsou 2-souvislé a jejich polygonální rovinná nakreslení M a N se protínají v alespoň dvou bodech (ne nutně vrcholech), pak nakreslení $M \cup N$ reprezentuje zas 2-souvislý graf. Opakovaným sjednocováním definujeme sjednocení $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$ více než dvou polygonálních rovinných nakreslení (operace sjednocení dvou nakreslení je asociativní i komutativní, takže výsledné nakreslení je dobře definované).

Posloupnost $N_1, N_2, \ldots, N_k$ polygonálních rovinných nakreslení nazveme *2-souvislým řetězcem*, když každé N_j reprezentuje 2-souvislý graf a pro každé $j = 1, 2, \ldots, k-1$ se N_j a N_{j+1} protínají alespoň ve dvou bodech (ne nutně vrcholech), avšak jinak jsou tato nakreslení vzájemně disjunktní. Následující výsledek obsahuje klíčovou ideu důkazu Věty o křivce.

Tvrzení. *Nechť* $N_1, N_2, \dots, N_k$ *je 2-souvislý řetězec a bod* x *leží vně každého z nakreslení* $N_j \cup N_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. *Potom* x *nutně leží vně celého nakreslení* $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$.

Pojďme to dokázat (stále postupujeme podle Thomassenova článku). Dokážeme kontrapozicí, že když x leží uvnitř nakreslení $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$ (tj. x leží uvnitř polygonu ohraničujícího vnější stěnu tohoto nakreslení), pak existuje $j < k$, že x leží uvnitř nakreslení $N_j \cup N_{j+1}$. Bod x tedy leží uvnitř nějakého polygonu $C \subset N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$. Existuje-li j, že $C \subset N_j \cup N_{j+1}$, jsme hotovi. Jinak lze vpodstatě bez újmy na obecnosti (přeindexováním a sjednocením několika N_j) předpokládat, že $C \subset N_1 \cup N_2 \cup N_3$ a C protíná $N_1 \backslash N_2$ i $N_3 \backslash N_2$. Polygon C vezmeme navíc minimální vzhledem k počtu hran, které má mimo N_2. Vezmeme dva body $a \in C \cap (N_1 \backslash N_2)$ a $b \in C \cap (N_3 \backslash N_2)$. Ty rozdělují C na dva oblouky P_1 a P_2, z nichž každý musí protnout N_2. Průniky $P_1 \cap N_2$ a $P_2 \cap N_2$ spojíme v N_2 nejkratší lomenou čarou P. Tedy $P \subset N_2$ a P má s C společné jen své konce. Konce chordy P polygonu C ho rozdělují na dva oblouky, které spolu s P tvoří polygony C_1 a C_2 (obsažené v $N_1 \cup N_2 \cup N_3$). Oba oblouky mají hrany mimo N_2 (jeden oblouk obsahuje bod a a druhý bod b), takže oba polygony C_1 a C_2 mají hrany mimo N_2 a tudíž každý jich tam má méně než jich má C. Podle části 1 posledního lemmatu (na minulé přednášce) však bod x leží uvnitř C_1 nebo uvnitř C_2 — řekněme, že uvnitř C_1. Kdyby polygon C_1 protínal $N_1 \backslash N_2$ i $N_3 \backslash N_2$, dostali bychom spor s minimalitou polygonu C. Takže $C_1 \subset N_1 \cup N_2$ nebo $C_1 \subset N_2 \cup N_3$ a jsme hotovi — bod x leží uvnitř nakreslení $N_1 \cup N_2$ nebo $N_2 \cup N_3$. Tvrzení je dokázáno.

Důkaz Věty o křivce. S pomocí tvrzení teď větu dokážeme. Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je prostá křivka, daná jako obraz $K = f([0,1])$ spojitého a prostého zobrazení $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, a $a, b \in \mathbb{R}^2 \backslash K$ jsou dva různé body mimo K. Ukážeme, že a a b lze spojit lomenou čarou, která neprotne K. Vezmeme malé $d > 0$, že vzdálenost a i b od K je větší než $2d$. Zobrazení f je spojité a jde z kompaktní množiny, takže je stejnoměrně spojité. Interval $[0,1]$ lze tedy rozdělit na podintervaly I_i, že obraz každého podintervalu $K_i = f(I_i)$ má průměr menší než d. Dostáváme tak rozdělení K na oblouky $K_1, K_2, \dots, K_k$, že K_i a K_{i+1} mají společný konec, jinak jsou ale tyto prosté křivky disjunktní, a $d(x,y) < d$ pro každé dva body $x, y \in K_i$. Nechť

$$d' = \min_{1 \le i < i'-1 \le k-1} d(K_i, K_{i'}) > 0$$

je nejmenší vzdálenost dvou nesousedních oblouků. Máme, že $d' \le d$ (jinak $d(K_1, K_3) > d$, takže konce oblouku K_2 mají vzdálenost větší než d, což je ve sporu s definicí oblouků). Pomocí stejnoměrné spojitosti f každý oblouk K_i dále rozdělíme na obloučky $K_{i,j}$ s průměrem menším než $d'/4$. Uvážíme čtvercové polygony

$$S(c) := \partial([c_x - d'/4, c_x + d'/4] \times [c_y - d'/4, c_y + d'/4]) \ ,$$

které mají střed v bodě $c = (c_x, c_y)$ a strany s délkou $d'/2$ rovnoběžné s osami (přesněji, $S(c)$ je tvořen čtyřmi vrcholy v rozích a čtyřmi stranami, jež jsou úsečky). $S(c)$ tedy je (po doplnění formalit) polygonální rovinné nakreslení grafu C_4 (abstraktní kružnice délky 4). Pro $i = 1, 2, \ldots, k$ definujeme polygonální rovinné nakreslení N_i jako

$$N_i = \bigcup_{c \in O_i} S(c) \ ,$$

kde O_i je množina konců všech obloučků $K_{i,j}$ (které zahrnují i oba konce K_i). Tvrdíme, že

1. $N_1, N_2, \ldots, N_k$ je 2-souvislý řetězec,
2. celá křivka K leží uvnitř nakreslení $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$ a
3. oba body a a b leží vně každého nakreslení $N_i \cup N_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Bude-li toto ověřeno, jsme hotovi. Pak totiž podle částí 1 a 3 a předchozího tvrzení lze a a b spojit lomenou čarou ležící vně $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$, a tato čára podle části 2 neprotíná K.

Dokážeme část 1. Každý polygon $S(c)$ jistě reprezentuje 2-souvislý graf a jsou-li $c, c' \in O_i$ dva sousedé na K_i (tj. konce nějakého obloučku $K_{i,j}$), mají vzdálenost menší než $d'/4$, tudíž se $S(c)$ a $S(c')$ protínají v alespoň dvou (fakticky právě dvou) bodech. Takže N_i reprezentuje 2-souvislý graf. Zřejmě se N_i a N_{i+1} protínají v alespoň dvou bodech, protože dokonce sdílejí $S(c)$, kde c je společný konec K_i a K_{i+1}. Pokud $c \in O_i$ a $c' \in O_{i'}$, kde $|i - i'| \geq 2$, je $d(c, c') \geq d'$, body c a c' tedy mají x-ovou nebo y-ovou vzdálenost alespoň $d'/\sqrt{2} > d'/2$, což zaručuje, že $S(c) \cap S(c') = \emptyset$. Proto N_i a $N_{i'}$ jsou disjunktní. Takže $N_1, N_2, \ldots, N_k$ tvoří 2-souvislý řetězec.

Dokážeme část 2. Ta je celkem jasná: každý oblouček $K_{i,j}$ má průměr menší než $d'/4$, takže celý leží uvnitř polygonu $S(c)$ se středem c v libovolném z jeho konců. Vnitřky polygonů $S(c)$ pro c probíhající konce všech obloučků na všech obloucích leží zřejmě uvnitř nakreslení $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_k$, tedy tam leží i celá K.

Konečně část 3. Podle definice leží $K_i \cup K_{i+1}$ uvnitř koule $B(c, d)$ se středem ve společném konci c oblouků K_i a K_{i+1}. Podle definice N_i tedy leží nakreslení $N_i \cup N_{i+1}$ v kouli $B(c, d + \sqrt{2}d'/4) \subset B(c, 2d)$, protože $d' \leq d$. Celé nakreslení $N_i \cup N_{i+1}$ je tedy uvnitř koule $B(c, 2d)$ (resp. její hraniční kružnice), zatímco oba body a a b jsou podle definice d vně této koule. Takže a a b jsou vně nakreslení $N_i \cup N_{i+1}$.

Tím je dokončen důkaz Věty o křivce (kroku K2) a tedy i celý Thomassenův důkaz Jordanovy věty o kružnici. $\square$