5. přednáška 29. října 2007

Závěrem první kapitoly o metrických prostorech se zmíníme o třech důležitých typech souvisejících matematických struktur.

Topologické prostory. Topologické prostory jsou chudší než metrické prostory: zapomeneme na metriku a necháme si jen otevřené množiny. *Topologický prostor*, stručněji *topologie*, je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde $\mathcal{T}$ je systém (ne nutně všech) podmnožin množiny X, který obsahuje množiny $\emptyset$ a X a je uzavřený na libovolná sjednocení a na konečné průniky. Explicitně,

(a) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$,
(b) $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \in \mathcal{T}$ a
(c) $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$, I konečná $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} \in \mathcal{T}$.

Prvkům systému $\mathcal{T}$ se říká *otevřené množiny* topologie $\mathcal{T}$. Jak víme (Tvrzení 1.1), systém otevřených množin metrického prostoru tvoří topologický prostor. Je ale mnoho topologií, které nelze vytvořit z metrického prostoru (úlohy 1 a 2). Na topologické prostory lze přenést mnohé z metrických prostorů (viz spojitost—Tvrzení 1.3 a kompaktnost—Věta 1.8).

Normované prostory. Normované prostory jsou bohatší mež metrické prostory, kromě metriky nesou další strukturu. *Normovaný prostor* je vektorový prostor X nad tělesem $\mathbf{R}$ vybavený zobrazením $\|\cdot\|:\ X \to \mathbf{R}$, zvaným *norma*, splňujícím tři axiomy (pro všechny $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbf{R}$):

(a) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ a
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Normovaný vektorový prostor je metrickým prostorem, funkce

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

je metrika (úloha 3). Protože se zrodila z normy, je translačně invariantní (česky: nemění se při posunutí), pro každé tři vektory x, y, z z X máme $d(x+z, y+z) = d(x, y)$. *Banachův prostor* je úplný normovaný prostor, tj. odvozená metrika je úplná.

Metriky $d_p(\cdot, \cdot)$ na $\mathbf{R}^n$, pro $p \geq 1$ a $p = \infty$ (viz 1. přednáška), jsou odvozeny z norem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ resp. } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Podobně i pro analogické metriky na prostoru spojitých funkcí $C[a, b]$. Všechny tyto prostory jsou Banachovy.

Prostory se skalárním součinem jsou ještě bohatší. *Prostor se skalárním součinem* (PSS) je vektorový prostor X nad tělesem $\mathbf{R}$, který je vybaven zobrazením $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ X\times X\to\mathbf{R}$, zvaným *skalární součin*, splňujícím tři axiomy (pro všechny $x,x',y\in X$ a $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$):

a) $\langle x,x\rangle\ge 0$, $\langle x,x\rangle=0 \iff x=0$,
b) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ a
c) $\langle \kappa x+\lambda x',y\rangle=\kappa\langle x,y\rangle+\lambda\langle x',y\rangle$.

Symetrie v (b) a linearita v prvním argumentu v (c) dávají, že skalární součin je lineární i ve druhém argumentu, je to bilineární zobrazení. Na rozdíl od metriky a normy může skalární součin nabývat záporných hodnot, ale na diagonále $x=y$ musí být nezáporný. Měří úhel mezi vektory a lze z něj odvodit normu a tedy i metriku, jak hned ukážeme. Příkladem PSS je euklidovský prostor $\mathbf{R}^m$ se skalárním součinem

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m.$$

Dalším příkladem je prostor spojitých funkcí $C[a,b]$ se skalárním součinem

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\;dx.$$

Následující nerovnost je jedna z nejdůležitějších v matematice.

Věta 2.1 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost). *V prostoru se skalárním součinem $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ pro každé dva vektory x a y platí, že*

$$\langle x,y\rangle^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Rovnost nastává, právě když je jeden z vektorů skalárním násobkem druhého, $x=\lambda y$ pro $\lambda\in\mathbf{R}$.

Důkaz. Byl v Lineární algebře, proto ho zde neuvádíme. □

Uvažme zobrazení $\|\cdot\|:\ X\to\mathbf{R}$ definované jako

$$\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Dá se ukázat (úloha 4), že toto zobrazení je norma. PSS je tedy také normovaný prostor (a tedy i metrický prostor a topologický prostor). Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost můžeme pomocí značení pro normu ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|.$$

Hilbertův prostor je úplný PSS, tj. odvozená metrika

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

je úplná. Euklidovský prostor $\mathbf{R}^n$ je Hilbertův, ale prostor spojitých funkcí $\mathcal{C}[a,b]$ Hilbertův není (úloha 5).

Kapitola 2. Diferenciální počet funkcí více proměnných.

Jak víme z MAI, za určitých předpokladů se funkce jedné proměnné dají lokálně aproximovat pomocí lineárních funkcí, s nimiž se lépe počítá. Konkrétně, má-li funkce $f:\ (a-\delta, a+\delta) \to \mathbf{R}$ v bodu a vlastní derivaci, máme v okolí a lineární aproximaci

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h),\ \ h \to 0.$$

Ve druhé kapitole ji zobecníme pro funkce s více proměnnými, a pak i pro zobrazení složená z několika takových funkcí. Budeme pracovat v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^m$ s obvyklým skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$, s odvozenou euklidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$$

a euklidovskou metrikou

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_m-y_m)^2},$$

a s funkcemi o m proměnných

$$f:\ D \to \mathbf{R}$$

definovanými na otevřených množinách D v $\mathbf{R}^m$.

Směrová derivace, parciální derivace, diferenciál. *Směrovou derivací* funkce $f:\ D \to \mathbf{R}$ v bodu a ve směru v, kde $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, bod a leží v D a v z $\mathbf{R}^m$ je nenulový vektor, rozumíme limitu

$$\mathrm{D}_v f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

pokud existuje. Představte si D jako oblast v třírozměrném euklidovském prostoru, kde funkce f měří teplotu a kterou prolétá po přímočaré dráze částice. Směrová derivace $\mathrm{D}_v f(a)$ pak udává okamžitou změnu teploty částice ve chvíli, kdy se nachází v bodu a a má vektor rychlosti v.

Parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i je směrová derivace $\mathrm{D}_{e_i} f(a)$, kde e_i je i-tý vektor kanonické báze, tj. $e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots,0)$ má na i-tém místě 1 a jinde nuly. Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Explicitně,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_m) - f(a_1,a_2,\ldots,a_m)}{h}.$$

Má-li f parciální derivaci podle x_i v každém bodě D, dostáváme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:\ D \to \mathbf{R},$$

která každému bodu a z D přiřazuje hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Vektor hodnot všech parciálních derivací funkce f v bodě a je *gradient* funkce f v a,

$$\nabla f(a) := (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)).$$

Počítat parciální derivace už umíme, při výpočtu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se proměnné různé od x_i berou jako konstanty a f tak derivujeme jako funkci jediné proměnné x_i. Například

$$\frac{\partial(x^3 y \sin(yz) + x \log z)}{\partial y} = x^3(\sin(yz) + zy\cos(yz)).$$

Funkce f má v bodě a *(totální) diferenciál*, jinými slovy f je v a *diferencovatelná*, když existuje takové lineární zobrazení $L: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, že

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Toto lineární zobrazení L nazýváme *diferenciálem* a značíme $\mathrm{D}f(a)$, jeho hodnota $L(h)$ na vektoru h pak je $\mathrm{D}f(a)(h)$. Podstatný rozdíl ve srovnání se směrovou a parciální derivací je ten, že ty jsou pouhá čísla, kdežto diferenciál je složitější věc, lineární zobrazení.

Směrová derivace, parciální derivace a diferenciál funkce f v bodu a dávají lokální aproximace f poblíž a lineární funkcí:

$$\begin{aligned}
f(a+tv) &= f(a) + \mathrm{D}_v f(a) \cdot t + o(t),\ t \to 0, \\
f(a+te_i) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot t + o(t),\ t \to 0, \\
f(a+h) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + o(\|h\|),\ \|h\| \to 0.
\end{aligned}$$

V prvních dvou vztazích je t reálné číslo jdoucí k nule a aproximace platí pouze pro argumenty funkce na přímce jdoucí bodem a ve směru v, resp. ve směru i-té souřadnicové osy. Ve třetím vztahu h probíhá body $\mathbf{R}^m$ a aproximace platí pro všechny argumenty funkce v okolí bodu a. Diferencovatelnost je silnější vlastnost f než existence směrových nebo parciálních derivací, z nichž neplyne ani spojitost funkce v daném bodě.

Příklady. 1. Funkce $f = f(x, y): \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definovaná jako 1 na množině $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2, x \neq 0\}$ a jako 0 pro všechny zbylé body roviny má v počátku všechny směrové derivace (jsou rovné nule), ale není tam spojitá.

2. Podobně, definujeme-li f jako 1 na souřadnicových osách, tj. na množině $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 0\}$, a jako 0 pro všechny zbylé body roviny, má f v počátku obě parciální derivace (jsou rovné nule), ale kromě nich už žádnou další směrovou derivaci. Funkce f opět není v počátku spojitá.

Pojem diferenciálu rozšíříme na obecnější situaci, kdy $f: D \to \mathbf{R}^n$ ($D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina) je zobrazení dané n-ticí souřadnicových funkcí: $f =$

$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $f_i : \ D \to \mathbf{R}$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě a z D *diferenciál* nebo že tam je *diferencovatelné*, existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

(Norma v čitateli je v $\mathbf{R}^n$, norma ve jmenovateli je v $\mathbf{R}^m$.) Lineární zobrazení L značíme $\mathrm{D}f(a)$. Z aproximačního pohledu to opět znamená, že

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \alpha(h), \quad \text{kde } \|h\| \to 0 \Rightarrow \|\alpha(h)\|/\|h\| \to 0.$$

Tvrzení 2.1. *Buď dáno zobrazení* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \ D \to \mathbf{R}^n$*, kde* $D \subset \mathbf{R}^m$ *je otevřená množina, a bod* a *v* D*.*

1. *Diferenciál* f *v* a *je určený jednoznačně.*
2. *Zobrazení* f *je diferencovatelné v* a*, právě když je každá souřadnicová funkce* f_i *diferencovatelná v* a*.*
3. *Když je* f *diferencovatelné v bodu* a*, potom je v* a *spojité.*

Důkaz. 1. Úloha 6. 2. Úloha 7. 3. Zřejmé. □

Úlohy

1. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor vzniklý z metriky, tj. tvořený otevřenými množinami nějakého metrického prostoru (X, d). Dokažte, že pro každé dva různé body a, b z X existují takové dvě otevřené množiny U, V z $\mathcal{T}$, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Topologiím s touto vlastností se říká *Hausdorffovy.*
2. Uveďte příklad topologie, která není Hausdorffova, takže nevznikla z metriky.
3. Dokažte, že funkce $d(x, y) := \|x - y\|$ definovaná na normovaném prostoru je metrika.
4. Ověřte, že funkce $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ na prostoru se skalárním součinem je norma.
5. Ukažte, že metrický prostor spojitých funkcí $\mathcal{C}[a, b]$ s metrikou danou skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ není úplný.
6. Dokažte část 1 Tvrzení 2.1.
7. Dokažte část 2 Tvrzení 2.1.