Přednáška 4, 19. 3. 2007

Ještě jednou sčítání a násobení OGF.

$\mathcal{A}$ = množina $\mathcal{A}$-struktur, $v_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathbb{N}_0$ váha,

$a_n := \# \{ A \in \mathcal{A} : v(A) = n \}$, $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n =$
$= \sum_{A \in \mathcal{A}} x^{v(A)}$. Podobně $\mathcal{B}$, B, $v_{\mathcal{B}}$, b_n, $B(x)$.

$\mathcal{C} = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$, $v_{\mathcal{C}}(C) = v_{\mathcal{A}}(C) \ \ldots \ C \in \mathcal{A}$

$\qquad\qquad\qquad = v_{\mathcal{B}}(C) \ \ldots \ C \in \mathcal{B}$.

Pak $C(x) = A(x) + B(x)$.

$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $v_{\mathcal{C}}(C) = v_{\mathcal{C}}((A,B)) =: v_{\mathcal{A}}(A) + v_{\mathcal{B}}(B)$.

Pak $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

Exponenciální gen. funkce a sčítání a násobení.

$\mathcal{A}$ = množina $\mathcal{A}$-struktur, $V_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$,

tj. $V_{\mathcal{A}}(A) \subset \mathbb{N}$ je konečná "množina vrcholů"

struktury A. ~~Váha je $v_{\mathcal{A}}(A) := |V_{\mathcal{A}}(A)|$~~

Předpokládáme dále, že

2

pro každé dvě konečné množiny $X, Y \subset \mathbb{N}$ s $|X| = |Y|$ platí $\#\{A \in \mathcal{A} : V_{\mathcal{A}}(A) = X\} = \#\{A \in \mathcal{A} : V_{\mathcal{A}}(A) = Y\}$, tj. počet struktur závisí jen na počtu vrcholů. Pak definujeme $a_n = \#\{A \in \mathcal{A} : V_{\mathcal{A}}(A) = [n]\}$, $A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

(EGF struktur $\mathcal{A}$)

Podobně $\mathcal{B}$, B, $V_{\mathcal{B}}$, b_n, $B(x)$.

$\mathcal{C} = \mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B} \rightsquigarrow$ EGF struktur $\mathcal{C}$ je opět $A(x) + B(x)$. ($V_{\mathcal{C}}$ = opět $\sqsubset^{V_{\mathcal{A}}}_{V_{\mathcal{B}}}$)

$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $V_{\mathcal{C}}(C) = V_{\mathcal{C}}((A, B)) = V_{\mathcal{A}}(A) \dot\cup V_{\mathcal{B}}(B)$,

(šmno $V_{\mathcal{A}}(A) \cap V_{\mathcal{B}}(B) = \emptyset$ pro $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$.)

Fixujme n-prvkovou množinu vrcholů struktur $C \in \mathcal{C}$, např. $[n]$. Pak

$c_n = \#\{C \in \mathcal{C} : V_{\mathcal{C}}(C) = [n]\} =$

$= \sum_{X \subset [n]} \#\{A \in \mathcal{A} : V_{\mathcal{A}}(A) = X\} \cdot \#\{B \in \mathcal{B} : V_{\mathcal{B}}(B) = [n] \setminus X\}$.

$= \dots = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ $(k = |X|)$.

Ale také $A(x)\cdot B(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n\geq 0} b_n \cdot \frac{x^n}{n!} =$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \frac{x^n}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}.$$

Dostali jsme

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ (součinová formule pro EGF)

EGF struktur $\mathcal{C}$ sestrojených ze struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ výše popsanou součinovou konstrukcí je součinem EGF struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$,

$$C(x) = A(x)\cdot B(x).$$

Podobně to funguje pro součin více než dvou druhů struktur.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Odvodíme EGF pro Stirlingova čísla $S(n,k)$. Připomeňme si, že

$S(n,k) = \#(\{x_1, x_2, \dots x_k\}$, kde $\bigcup_{i=1}^{k} x_i = [n]$, $x_i \neq \emptyset$ $\forall i$ a $x_i \cap x_j = \emptyset$ pro $i \neq j)$. Položme

$S_k(x) = \sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$. Protože $S(1,n) = \begin{cases} 0 & \dots n=0 \\ 1 & \dots n\geq 1 \end{cases}$, máme $S_1(x) = 1\cdot\frac{x^1}{1!} + 1\cdot\frac{x^2}{2!} + \dots$

$= e^x - 1$.

Dále $S(n,k) = \frac{\#\left((x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ kde } \text{—}\right)}{k!}$,

takže, podle součinové formule,

$$S_k(x) = \frac{1}{k!}\cdot \underbrace{S_1(x)\cdot S_1(x)\cdot\ldots\cdot S_1(x)}_{k \text{ krát}} = \frac{S_1(x)^k}{k!}.$$

Tedy $$\boxed{\sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}}.$$

Formální konvergence v $\mathbb{C}[[x]]$

Řekneme, že posloupnost m. řad $(f_1, f_2, f_3, \dots) \subset \mathbb{C}[[x]]$ (formálně) konverguje, když pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je posloupnost koeficientů $([x^n]f_1, [x^n]f_2, [x^n]f_3, \dots)$ od jistého indexu dále konstantní, rovná hodnotě $l_n \in \mathbb{C}$. (Formální) limitu $\lim_{n\to\infty} f_n$ pak definujeme jako $f = \sum_{n \geq 0} l_n x^n$.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Nechť $\operatorname{ord}(f_n) \to \infty$ pro $n \to \infty$. Pak částečné součty řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergují k limitě $f \in \mathbb{C}[[x]]$; klademe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$.

D. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ ex. $M \in \mathbb{N}$, že $m \geq M \Rightarrow \operatorname{ord}(f_m) > n$. Pak $m > M \Rightarrow [x^n] \sum_{k=0}^{m} f_k = \sum_{k=0}^{m} [x^n] f_k = \sum_{k=0}^{M} [x^n] f_k$, tedy $(f_0, f_0+f_1, f_0+f_1+f_2, \dots)$ konverguje. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Nechť $\operatorname{ord}(f_n) \to \infty$ pro $n \to \infty$. Pak částečné součiny nekon. součinu $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n)$ konvergují k limitě $f \in \mathbb{C}[[x]]$; klademe $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n) = f$.

D. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ máme $M \in \mathbb{N}$, že $m > M \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{ord}(f_m) > n$. Pak pro $m \geq M$ máme

$$[x^n] \prod_{k=1}^{m} (1+f_k) = [x^n] \underbrace{\prod_{k=1}^{r} (1+f_k)}_{S} \cdot \prod_{k=r+1}^{m} (1+f_k)$$

$$= [x^n]\, S \Big(1 + \underbrace{\sum_{\substack{I \subset [r+1, m] \\ I \neq \emptyset}} \prod_{i \in I} f_i}_{V} \Big)$$

$$= [x^n] (S + SV) = [x^n] S + [x^n] SV$$

$$= [x^n] S = [x^n] \prod_{k=1}^{r} (1+f_k),$$

protože každý sčítanec ve V má $\mathrm{ord} > n$, takže i $\mathrm{ord}(V) > n$ a $\mathrm{ord}(SV) > n$. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Příklad}}$ • $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde

$a_n = \#$ rozkladů n na různé části, tj. $\#$ vyjádření $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, kde $m_i \in \mathbb{N}$ a $m_1 < m_2 < \dots < m_k$.

• $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$ kde $b_n = \#$ všech rozkladů n,

tj. # vyjádření $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, kde $m_i \in \mathbb{N}$ a $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$. (V obou příkladech $a_0 = b_0 = 1$.)

D. Je jasné, že $[x^n] \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} =$

$=$ # řešení rovnice $n = r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 2 + \dots + r_n \cdot n$, kde $r_i \in \mathbb{N}_0$. Ale to je právě počet vyjádření n jako součtu několika (r_1) jedniček, několika (r_2) dvojek, atd. $\boxtimes$

Tvrzení Nechť $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ a $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$ jsou dvě m. řady. (tj. $\mathrm{ord}(g) \geq 1$)

Pokud je f polynom nebo $\underline{g(0) = 0, \text{ tj. } b_0 = 0}$, tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$ konverguje s limitě $L \in \mathbb{C}[[x]]$; klademe $f(g) := L$.

D. Když $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, máme bez problémů $f(g) = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \dots + a_n g^n$. Pokud

$b_0 = 0$, máme $\mathrm{ord}(a_n g^n) \geq n \cdot \mathrm{ord}(g) \geq n$ a řada konverguje $\boxtimes$

Předchozí tvrzení ~~…~~ zavádí operaci (formálního) skládání mocninných řad: $f(g) = f \circ g$.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Ukažme jinak, že $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ je jednotka v $\mathbb{C}[[x]] \Leftrightarrow a_0 \neq 0$.

$a_0 = 0 \rightarrow$ jasné, že f nemá multipl. inverz.

$a_0 \neq 0 \rightarrow f = a_0 (1 - g)$, kde $g = -\frac{a_1}{a_0} x - \frac{a_2}{a_0} x^2 - \dots$

Položme $h = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} g^k = \frac{1}{a_0} \cdot (1 + x + x^2 + \dots) \circ g$.

Protože $\mathrm{ord}(g) \geq 1$, je h dobře definovaná.

Ovšem
$$f \cdot h = a_0 (1-g) \cdot \frac{1}{a_0} (1 + g + g^2 + \dots) = (1-g) \cdot (1 + g + g^2 + \dots) = 1.$$

Takže h je multipl. inverz za f. $\boxtimes$
