4. přednáška 22. října 2007

Úplné metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *úplný*, když každá cauchyovská posloupnost bodů v M konverguje.

Příklady. 1. Euklidovský prostor $\mathbf{R}$ je úplný, každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má limitu. Úplné jsou i podprostory $[2, 3]$ a $[-5, +\infty)$. Naopak podprostory $\mathbf{Q}$ a $(0, 1]$ úplné nejsou. Obecněji i euklidovské prostory $\mathbf{R}^n$ jsou úplné.

2. Z Matematické analýzy II víme, že prostor $\mathcal{C}[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ s maximovou metrikou je úplný. Je-li totiž posloupnost (f_n) cauchyovská, splňuje stejnoměrnou Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a tedy na $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k jisté funkci f. Funkce f je na M spojitá, protože je stejnoměrnou limitou spojitých funkcí. Tedy $f \in \mathcal{C}(M)$ a v supremové metrice máme

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

3. Vezmeme znovu spojité funkce $\mathcal{C}[a, b]$, ale teď $\mathcal{C}[a, b]$ vybavíme integrální metrikou. Vzniklý metrický prostor není úplný. Sestrojíme cauchyovskou posloupnost, která nemá limitu. Položíme $a = -1, b = 1$ a uvážíme funkce

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \le x \le -n^{-1} \\ nx & \text{pro } -n^{-1} \le x \le n^{-1} \\ 1 & \text{pro } n^{-1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Pak $(f_n) \subset \mathcal{C}[-1, 1]$ a (f_n) je cauchyovská, protože pro $m \le n$ máme

$$d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx \le \int_{-1/m}^{1/m} 1\, dx = 2/m.$$

Neexistuje však funkce $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$, pro níž by $f_n \to f$ pro $n \to \infty$. Taková funkce f by podle definice f_n musela být na intervalu $[-1, 0)$ identicky rovna -1 a na intervalu $(0, 1]$ identicky rovna 1, což je pro funkci spojitou na $[-1, 1]$ nemožné.

4. Kompaktní metrický prostor je vždy úplný (úloha 1). Naopak to obecně neplatí, $\mathbf{R}$ je úplný a nekompaktní metrický prostor.

5. Uvažme euklidovské metrické prostory $\mathbf{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$. Bijekce

$$f(x) = \arctan(x) : \ \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

je homeomorfismus, f i $f^{-1}(x) = \tan(x)$: $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ jsou spojitá zobrazení. Ovšem $\mathbf{R}$ je úplný metrický prostor, ale $(-\pi/2, \pi/2)$ nikoli. Úplnost metrického prostoru není, na rozdíl od kompaktnosti, topologická vlastnost, není určena pouze otevřenými množinami, závisí i na metrice. Nicméně se úplnost se zachovává homeomorfismem, který je v obou směrech stejnoměrně spojitý (funkce $\tan x$ není na $(-\pi/2, \pi/2)$ stejnoměrně spojitá).

Tvrzení 1.9. *Úplnost metrického prostoru se zachovává následujícími operacemi.*

1. *Přechodem k uzavřenému podprostoru.*
2. *Obrazem stejnoměrně spojitým prostým zobrazením, pokud je i inverzní zobrazení stejnoměrně spojité.*
3. *Kartézským součinem.*

Důkaz. 1. Úloha 2. 2. Úloha 3. 3. Úloha 4. □

Banachova věta o pevném bodu. Pomocí úplnosti se dá o mnohých rovnicích dokázat, že v úplném metrickém prostoru mají řešení. Typickým příkladem je rovnice $x^2 = 2$, která sice nemá řešení v oboru racionálních čísel, ale v širším oboru reálných čísel se díky úplnosti dokáže existence řešení. Popíšeme obecný postup, který zaručuje existenci řešení jisté třídy rovnic v úplných metrických prostorech.

Zobrazení $f: M \to M$ metrického prostoru (M, d) do sebe je *kontrahující*, když pro nějaké číslo $q \in \mathbf{R}$ splňující $0 < q < 1$ pro každé dva body x, y v M platí

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y).$$

Kontrahující zobrazení tedy kontrahuje, zmenšuje vzdálenost každých dvou bodů alespoň o pevný faktor q menší než 1. Je jasné, že kontrahující zobrazení je stejnoměrně spojité. *Pevným bodem* zobrazení f množiny X do sebe rozumíme bod a z X splňující $f(a) = a$. Posloupnost $(x_n) \subset X$ je *posloupností iterací* zobrazení $f: X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_1 \in X$ je libovolný startovací bod posloupnosti iterací).

Věta 1.10 (Banachova věta o pevném bodu). *Kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M, d) do sebe má právě jeden pevný bod a každá posloupnost iterací $(x_n) \subset M$ zobrazení f k němu konverguje.*

Důkaz. Uvažme libovolnou posloupnost iterací (x_n) kontrahujícího zobrazení f. Protože $x_n = f(x_{n-1})$ a f je kontrahující s konstantou q, pro každé $n \in \mathbf{N}$ máme odhad

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq qd(x_n, x_{n-1}) \leq q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq q^{n-1} d(x_2, x_1).$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti pak pro každé $k, n \in \mathbf{N}$ máme

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_2, x_1)(q^{n+k-2} + q^{n+k-3} + \ldots + q^{n-1}) \\ &< d(x_2, x_1)(q^{n-1} + q^n + q^{n+1} + \ldots) \\ &= d(x_2, x_1) q^{n-1}/(1 - q) \\ &\to 0 \text{ pro } n \to \infty \text{ (neboť } 0 < q < 1). \end{aligned}$$

Posloupnost (x_n) je tedy cauchyovská. Díky úplnosti prostoru M má limitu a. Ze spojitosti f pak plyne, že a je pevným bodem f:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

Nechť a, b jsou dva pevné body f. Pak

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq qd(a,b),$$

což vynucuje $d(a,b) = 0$ a $a = b$. Pevný bod je jediný. $\square$

Dá se ukázat (úloha 5), že věta platí i za zdánlivě slabšího předpokladu, že kontrahující je jen nějaká iterace $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots(f(x))))$ zobrazení f.

Ukážeme použití Věty 1.10 při řešení diferenciálních rovnic. Začneme jednoduchou rovnicí $y'(x) = y(x)$, kdy chceme najít funkci rovnou své derivaci. Řešením této rovnice je exponenciála $y(x) = \exp(x)$ a spousta dalších funkcí, jako třeba $-3\exp(x+10)$. Pro každou dvojici reálných čísel a, b dokonce existuje takové řešení, že $y(a) = b$, sice $y(x) = b\exp(x-a)$. Jak uvidíme, s tímto požadavkem je řešení (lokálně) jednoznačné. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu se dá lokální existence a jednoznačnost řešení dokázat pro širokou třídu diferenciálních rovnic

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} y(a) & = & b \\ y'(x) & = & f(x, y(x)). \end{array}\right.$$

Zde $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je zadaná funkce (pravá strana rovnice) a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou zadaná čísla. Hledáme reálnou funkci $y(x)$ a otevřený interval I obsahující a, že $y(x)$ je na I definovaná, $y(a) = b$ (říkáme, že $y(x)$ splňuje *počáteční podmínku* $y(a) = b$) a $y(x)$ má I derivaci splňující pro každé $x \in I$ druhý vztah v (*), tj. vlastní diferenciální rovnici.

Věta 1.11 (Picardova). *Pokud je $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ spojitá a existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbf{R}$ platí*

$$|f(u,v) - f(u,w)| \leq M|v-w|,$$

pak každý bod $a \in \mathbf{R}$ má okolí $I = (a-\delta, a+\delta)$, na němž má úloha (*) jednoznačné řešení $y(x)$.

Důkaz. Budeme pracovat na intervalu $I = (a-\delta, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a na jeho uzávěru $J = [a-\delta, a+\delta]$. Z vlastností Riemannova integrálu (výpočet Riemannova integrálu Newtonovým integrálem, Riemannův integrál jako funkce horní integrační meze) plyne, že pro spojitou funkci f je úloha (*) ekvivalentní rovnici

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt,\ \ x \in I$$

—je-li $y(x)$ na I řešením úlohy (*), je řešením rovnice a naopak. Ukážeme, že pro dostatečně malé δ má na intervalu I poslední rovnice—a tedy i úloha (*)—jednoznačné řešení $y(x)$. Pravá strana poslední rovnice definuje zobrazení A, které funkci $y(x)$ spojité na J přiřadí funkci $z(x)$,

$$z(x) = A(y(x)) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Integrál je spojitou funkcí své horní integrační meze, takže $z(x)$ je na J rovněž spojitá (dokonce má na J spojitou první derivaci: $z'(x) = f(x, y(x))$). Máme zobrazení

$$A : \mathcal{C}[a-\delta, a+\delta] \to \mathcal{C}[a-\delta, a+\delta].$$

Odvodíme, že A má pro dostatečně malé δ jednoznačný pevný bod y.

Pro tento účel vybavíme $\mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]$ maximovou metrikou $d(\cdot,\cdot)$, čímž dostaneme úplný metrický prostor (viz příklad 2), a použijeme Větu 1.10. Uvidíme, že pro dostatečně malé δ je A kontrahující. Nechť $y(x)$ a $z(x)$ jsou dvě funkce z $\mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]$. Pak

$$\begin{aligned}
d(A(y), A(z)) &= \max_{x\in J} |A(y)(x) - A(z)(x)| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M|y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M \max_{t\in J} |y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x M d(y, z)\, dt \right| \\
&= M\delta \cdot d(y, z).
\end{aligned}$$

Zvolíme-li $\delta \le \frac{1}{2M}$, máme $d(A(y), A(z)) \le \frac{1}{2} d(y, z)$ pro libovolné dvě funkce z $\mathcal{C}[a-\delta, a+\delta]$ a zobrazení A je kontrahující. Podle Věty 1.10 má jednoznačný pevný bod a Věta 1.11 je dokázána. □

Když reálná funkce dvou proměnných $f(u, v)$ splňuje pro nějakou konstantu $M > 0$ na množině $D \subset \mathbf{R}^2$ podmínku Věty 1.11, to jest

$$\forall\ (u, v), (u, w) \in D :\ |f(u, v) - f(u, w)| \le M|v - w|,$$

řekneme, že f je na D *lipschitzovská* nebo že na D splňuje *Lipschitzovu podmínku* (v druhé proměnné). Funkce $f(u, v) = v$ z úvodního příkladu je lipschitzovská na celém $\mathbf{R}^2$, třeba s konstantou $M = 1$. Funkce $b \exp(x - a)$ je proto pro každé dvě čísla $a, b \in \mathbf{R}$ jednoznačným lokálním řešením diferenciální rovnice $y(a) = b$, $y'(x) = y(x)$.

Podmínka lipschitzovskosti na celém $\mathbf{R}^2$ je zbytečně silná a v praxi často není splněna. Stačí však její lokální splnění. Dokažte si (úloha 7), že Věta 1.11 platí i za slabšího předpokladu lokální lipschitzovskosti.

Úlohy

1. Dokažte, že kompaktní metrický prostor je úplný.
2. Dokažte, že podmnožina úplného metrického prostoru indukuje úplný podprostor, právě když je uzavřená.
3. Dokažte, že když $f: M \to N$ je bijekce mezi metrickými prostory, přičemž f i f^{-1} je stejnoměrně spojité zobrazení, pak je prostor M úplný, právě když je prostor N úplný.
4. Kartézský součin dvou úplných metrických prostorů je úplný.
5. Ukažte, že zobrazení úplného metrického prostoru do sebe, jehož nějaká iterace je kontrahující, má jediný pevný bod.
6. Dokažte pomocí Banachovy věty o pevném bodu, že polynom x^2-2 má v $\mathbf{R}$ kořen. Jak bude vypadat posloupnost iterací konvergující k $\sqrt{2}$? Návod: graf funkce x^2-2 aproximujte tečnou.
7. Nechť $D \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $(a,b) \in D$ a $f: D \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce, která je na D lipschitzovská ve druhé proměnné. Pak má diferenciální rovnice (*) lokálně jednoznačné řešení.