1

Přednáška 3, 12. 3. 2007

(2) Generující funkce a kombinatorické struktury

obecná enumerativní úloha: $(S_n)_{n\geq 0}$ je posl. konečných množin, zajímají nás jejich mohutnosti $s_n = |S_n|$.

obyčejná generující funkce (OGF) posloupnosti $(s_n)_{n\geq 0}$

je $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$.

exponenciální generující funkce (EGF) — " —

je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$.

mocninná řada s komplexními koeficienty (m.ř.)

je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Jejich množinu označíme

jako $\mathbb{C}[[x]]$. značení: $a_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Sčítání a násobení m.ř.

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$ (Cauchyův součin)

(Hadamardův součin: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_n) x^n$)

<u>Kombinatorický význam operací + a • :</u>

$a_n = \#$ A-struktur váhy n, $A(x) =$ OGF
$b_n = \#$ B- — " — , $B(x) =$ OGF, pak

$C(x) = A(x) + B(x)$ je OGF C-struktur ~~[illegible]~~, kde C-str. váhy n je buď A-str. váhy n nebo B-str. váhy n.

$C(x) = A(x) \cdot B(x) \to C(x)$ je OGF C-struktur, kde C-str. váhy n je dvojice (α, β), přičemž α je A-str., β je B-str. a $\text{váha}(\alpha) + \text{váha}(\beta) = n$.

$f \in \mathbb{C}[[x]]$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{řád } f}}{\text{ord}}(f) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : [x^n] f \neq 0\}$.
$\text{ord}(0) = +\infty$.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $(\mathbb{C}[[x]], +, \cdot)$ je obor integrity (= komutativní okruh s 1 bez netriv. dělitelů nuly).

<u>D.</u> $0 = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \dots$, $1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots$, axiomy je lehké ověřit, např. $f \neq 0, g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$, protože $\text{ord}(fg) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$.

$\boxtimes$

Tvrzení $f \in \mathbb{C}[[x]]$ je jednotka, tj. má multiplikativní inverz, tj. existuje $g \in \mathbb{C}[[x]]$, že $fg = 1$, právě když $\underline{[x^0]f \neq 0}$, tj. $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ a $\underline{a_0 \neq 0}$.

D. $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$

$$f \cdot g = 1 \iff a_0b_0 = 1,\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0,$$
$$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0,\ \dots;$$

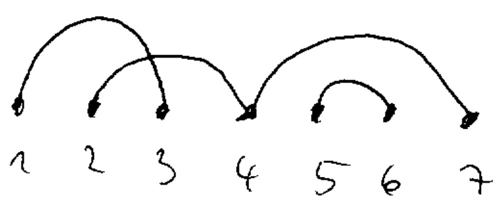
čísla a_n jsou daná a b_n jsou neznámé. Je jasné, že pro $a_0 = 0$ neexistuje řešení a že pro $a_0 \neq 0$ máme jediné řešení $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0}$, $b_2 = -\frac{a_2b_0 - a_1b_1}{a_0}, \dots$ $\boxtimes$

Příklad $(1+x+x^2+x^3+\dots)(1-x) = 1$, takže $1+x+x^2+\dots$ a $1-x$ jsou v $\mathbb{C}[[x]]$ vzájemně multiplikativními inverzy. Obecněji, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^nx^n\right)^{-1} = 1-ax$ a $(1-ax)^{-1} = \sum_{n \geq 0} a^nx^n$.

Příklad $S(n,k)$ = Stirlingova čísla (2. druhu) = počet rozkladů $[n] = \{1,2,\dots,n\}$ (nebo nějaké jiné n-prvkové množiny) na k neprázdných množin (bloků). Např. $S(n,1) = S(n,n) = 1$, $S(n,2) = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ pro $n \geq 2$. Platí, že

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\, x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}}$$

D. Rozklady reprezentujeme kanonickými slovy (do nichž je lépe vidět): $P = \{\{2,4,7\},\{1,3\},\{5,6\}\} =$



$\uparrow B_2 \quad \uparrow B_1 \quad \uparrow B_3$

$= w = 1212332 = 1\,\underset{\emptyset = u_1}{}\,2\,\underbrace{12}_{u_2}\,3\,\underbrace{32}_{u_3}$.

Obecně P reprezentujeme slovem w, které má strukturu $\underline{w = 1\,u_1\,2\,u_2\,3\,u_3 \ldots u_{k-1}\,k\,u_k}$, kde u_i je libovolné (i prázdné) slovo nad abecedou $\{1,2,\ldots,i\} = A_i$ a w má délku n (když je P rozklad $[n]$). Protože části u_i volíme na sobě nezávisle a $\sum_{n \geq 0}(\#\text{slov nad } A_i \text{ délky } n)\, x^n = \sum_{n \geq 0} i^n x^n = \frac{1}{1-ix}$) podle součinu OGF máme

$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n = \underbrace{x^k}_{1\,2\ldots k} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{u_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-2x}}_{u_2} \cdots \underbrace{\frac{1}{1-kx}}_{u_k} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

$\boxed{\text{Příklad}}$ $c(n,k) := \#$ řešení rovnice $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$, kde $x_i \in \mathbb{N}$, $c(n)=\sum_{k=1}^{n} c(n,k)$. Vyjádření $n=x_1+x_2+\cdots+x_k$ je <u>kompozice čísla n</u>. Odvodíme vzorečky pro $c(n,k)$ a $c(n)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c(n,k)\right)x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c(n,k)x^n = \sum_{k=1}^{\infty}(x^1+x^2+x^3+\ldots)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x/(1-x)}{1-x/(1-x)} = \frac{x}{1-2x}$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^n$, takže $\boxed{c(n)=2^{n-1}!}$

OGF kompozic s k částmi je součinem k kopií OGF kompozic s jedinou částí.

~~Ale~~ K této rovnosti – sčítáme ∞ mnoho gen. funkcí – se vrátíme příště. A co $c(k,n)$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)^k} = x^k(1-x)^{-k}$$ a podle

Binomické věty se to rovná $x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} (-1)^m x^m$.

Takže $C(n,k) = [x^n]\, x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-k}{m} (-1)^m x^m$

$$= \binom{-k}{n-k} (-1)^{n-k} =$$

$$= \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-(n-k)+1)}{(n-k)!} (-1)^{n-k}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots k}{(n-k)!} = \binom{n-1}{n-k}. \text{ tedy}$$

$$\boxed{C(n,k) = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}}$$

Skutečně $\sum_{k=1}^{n} C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = (1+1)^{n-1} =$

$= 2^{n-1} = C(n)$.