Přednáška 3, 16. října 2019

Kompaktnost. Heineho–Borelova věta. Vztah bodu a podmnožiny. Homeomorfismus

Podprostory. *Podprostorem* $X \subset M$ metrického prostoru (M, d) rozumíme metrický prostor (X, d) se zúženou metrikou (kterou označujeme stejným písmenem jako pro celý prostor, i když jde přísně vzato, pro $X \neq M$, o jinou funkci). Platí, že množina $A \subset X$ je otevřená (uzavřená) v podprostoru X, právě když existuje otevřená (uzavřená) množina $Y \subset M$, že $A = X \cap Y$ (úloha 10).

Je dobré si uvědomit, že uzavřenost a otevřenost množiny je relativní pojem: pro $A \subset X \subset M$ nemusí být A současně otevřená (či uzavřená) v M i v podprostoru X, a podobně v situaci $A \subset X, Y$ nemusí být A současně otevřená (či uzavřená) v obou prostorech X a Y. Například v euklidovských prostorech $A = [0, 1) \subset X = A, Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ je A uzavřená množina v prostoru X, ale ne v prostoru Y.

Spojitá zobrazení. Zobrazení $f\colon M \to N$ mezi dvěma metrickými prostory je *spojité*, pokud

$$\forall\, a \in M\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)\ .$$

První koule je v M a druhá v N. Ekvivalentní definice spojitosti jsou Heineho (pomocí limit posloupností, viz úloha 1) a topologická: zobrazení $f\colon M \to N$ mezi dvěma metrickými prostory je *topologicky spojité*, pokud pro každou otevřenou (uzavřenou) množinu $Y \subset N$ je její vzor

$$f^{-1}(Y) = \{a \in M \mid f(a) \in Y\} \subset M$$

otevřená (uzavřená) množina v M (úloha 2).

Vlastnosti kompaktních množin. Stále se jedná, tak jako v případu topologické definice spojitosti, o opakování věcí již zmíněných v Matematické analýze II. (M, d) a (N, e) buďte dva metrické prostory a $X \subset M$. Když je M kompaktní a X uzavřená množina, je X kompaktní (úloha 3). Když je M obecný prostor a X je kompaktní množina, je X uzavřená a omezená množina (úloha 4). Připomínáme, že množina $X \subset M$ je *omezená*, když $X \subset B$ pro nějakou kouli B v M. Opačná implikace obecně neplatí, v příští kapitole o posloupnostech a řadách funkcí uvedeme příklad uzavřené a omezené ale nekompaktní množiny v jistém metrickém prostoru funkcí, ale platí v euklidovských prostorech (úloha 5).

Je-li zobrazení $f\colon M \to N$ spojité a podmnožina $X \subset M$ je kompaktní, je i podmnožina

$$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\} \subset N$$

kompaktní (úloha 6). Platí princip maxima a minima (úloha 7): je-li zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ je obvyklý euklidovský prostor) spojité a podmnožina $X \subset M$ je kompaktní, pak existují takové body $a, b \in X$, že

$$\forall\, x \in X :\ f(a) \le f(x) \le f(b)\ .$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší i svou největší hodnotu. Tento výsledek byl asi hlavní motivací pro obecné abstraktní definice kompaktnosti.

Topologická definice kompaktnosti. Řekneme, že podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je *topologicky kompaktní*, pokud pro každý systém otevřených množin X_i, $i \in I$, v M platí:

$$\bigcup_{i \in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists\, \text{konečná } J \subset I :\ \bigcup_{i \in J} X_i \supset A\ .$$

To se vyjadřuje heslem: „každé otevřené pokrytí množiny A má konečné podpokrytí“. Dokážeme, že tato definice je ekvivalentní původní definici kompaktnosti.

Věta (Heineho–Borelova). *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme vzít $A = M$ (úloha 8). Nejdřív dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť (M, d) je kompaktní prostor a

$$M = \bigcup_{i \in I} X_i$$

je jeho otevřené pokrytí (každá množina X_i je otevřená); nalezneme jeho konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\ \text{konečná množina } S_\delta \subset M :\ \bigcup_{a \in S_\delta} B(a,\, \delta) = M\ .$$

Kdyby to tak nebylo, pak by totiž existovalo $\delta_0 > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že $1 \le m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \ge \delta_0$, ale ve sporu s předpokládanou kompaktností

M tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost (úloha 9). Skutečně, kdyby (negujeme hořejší tvrzení o δ a S_δ) existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je $M \setminus \bigcup_{a \in S} B(a, \delta_0) \neq \emptyset$, pak máme-li již definované body $a_1, a_2, \dots, a_n$ s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$, vezmeme $a \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \delta_0)$ a položíme $a_{n+1} = a$ (pak má $a = a_{n+1}$ od každého bodu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vzdálenost alespoň δ_0). Takto definujeme celou posloupnost (a_n).

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že (konečné množiny S_δ jsou definované výše)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, b_n \in S_{1/n}\; \forall\, i \in I:\; B(b_n,\, 1/n) \not\subset X_i\ .$$

Kdyby to tak nebylo, pak by (negujeme předchozí tvrzení) existovalo $n_0 \in \mathbb{N}_0$, že pro každé $b \in S_{1/n_0}$ existuje $i_b \in I$, že $B(b, 1/n_0) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b \in S_{1/n_0}} B(b, 1/n_0)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{1/n_0}\} \subset I$ ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny M.

Zvýrazněné (na samostatném řádku uvedené) tvrzení o n a b_n tedy platí a můžeme vzít posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost $(b_{k_n}) \subset (b_n)$ s $\lim b_{k_n} = b \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_j existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $1/k_n < r/2$ a $d(b, b_{k_n}) < r/2$. Pro každé $x \in B(b_{k_n}, 1/k_n)$ pak podle trojúhelníkové nerovnosti máme, že $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < r/2 + r/2 = r$. Tedy

$$B(b_{k_n}, 1/k_n) \subset B(b, r) \subset X_j\ ,$$

ve sporu s hořejší vlastností bodů b_n. Předpoklad neexistence konečného podpokrytí vede ke sporu, proto pokrytí M množinami X_i, $i \in I$, má konečné podpokrytí.

Dokážeme implikaci $\Leftarrow$, což je lehčí. Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá daná posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad

$$\forall\, b \in M\; \exists\, r_b > 0:\; M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b,\, r_b)\} \text{ je konečná}$$

vede ke sporu. Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b,\, r_b)$ bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$ a nahlédli, že existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b\in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b\in N} M_b$ je konečná (je to konečné sjednocení konečných množin). To je ale spor, protože $\bigcup_{b\in N} B(b, r_b) = M$. Předpoklad tedy neplatí a naopak (znovu negujeme) je pravda, že

$$\exists\, b \in M\ \forall\, r > 0:\ \ M_r := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b,\, r)\} \text{ je nekonečná }.$$

Teď už lehce z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou b. Nechť už jsme definovali indexy $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, že $d(b, a_{k_i}) < 1/i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Množina indexů $M_{1/(n+1)}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{1/(n+1)}$. Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < 1/(n+1)$. Takto je definována podposloupnost (a_{k_n}) konvergující k b. $\square$

Vztah bodu a podmnožiny. Nechť (M, d) je metrický prostor, $a \in M$ a $X \subset M$. V následujících definicích symbolem U rozumíme *okolí bodu* a, otevřenou množinu $U \subset M$ s $a \in U$. Řekneme, že a je

- *vnitřní bod* množiny X, když $\exists\, U$, že $U \subset X$.
- *vnější bod* množiny X, když $\exists\, U$, že $U \subset M \setminus X$.
- *hraniční bod* množiny X, když $\forall\, U$ je $U \cap X \ne \emptyset \ne U \cap (M \setminus X)$.
- *limitní bod* množiny X, když pro $\forall\, U$ je průnik $U \cap X$ nekonečný.
- *izolovaný bod* množiny X, když $\exists\, U$, že $U \cap X = \{a\}$.

Vnitřní a izolované body množiny X v ní leží a vnější body leží mimo ni. Hraniční a limitní body mohou ležet v X i mimo ni. Příklad ilustrující tyto pojmy ponecháváme jako úlohu 11.

Homeomorfismus. (M, d) a (N, e) buďte metrické prostory a $f\colon M \to N$ buď zobrazení. Řekneme, že f je *homeomorfismus*, je-li to bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení. Dva *homeomorfní* prostory jsou ty, které mezi sebou mají homeomorfismus. Homeomorfní prostory nelze rozlišit jen pomocí otevřených množin. Například euklidovské prostory (a, b) (kde $a < b$ jsou reálná čísla) a celé $\mathbb{R}$ jsou homeomorfní (úloha 12). Pro $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$ je jejich homeomorfismem třeba funkce $\tan x$. Na druhou stranu zobrazení mezi euklidovskými prostory

$$f\colon [0,\, 2\pi) \to S_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2,\ \ f(t) = (\cos t,\, \sin t)\ ,$$

není jejich homeomorfismus. Je to sice spojitá bijekce, ale inverzní zobrazení f^{-1} není spojité v bodu $(1, 0)$. Příště si ukážeme, že oba prostory ani homeomorfní nejsou. S tímto příkladem úzce souvisí následující tvrzení.

Tvrzení (kompaktnost a homeomorfismus). *Je-li $f\colon M \to N$ spojité prosté zobrazení mezi metrickými prostory a M je kompaktní, je inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(M) \to M$ spojité. Zobrazení f je pak tedy homeomorfismem prostorů M a $f(M)$ (poslední je dán jako podprostor prostoru N).*

Důkaz uděláme pořádně příště.

Úlohy

1. Formulujte Heineho definici spojitosti a dokažte, že je ekvivalentní původní definici.
2. Dokažte, že obě verze topologické definice spojitosti, s otevřenými i s uzavřenými množinami, jsou ekvivalentní původní definici.
3. Dokažte, že uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.
4. Dokažte, že každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená.
5. Připomeňte si důkaz věty: je-li $X \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená a omezená množina euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak je X kompaktní.
6. Dokažte, že obraz kompaktní množiny spojitým zobrazením je kompaktní množina.
7. Připomeňte si důkaz principu maxima a minima.
8. Proč se v důkazu Heineho–Borelovy věty můžeme omezit jen na případ celého prostoru?
9. Proč posloupnost $(a_n) \subset M$ splňující $d(a_m, a_n) \geq \delta_0 > 0$, jakmile $m \neq n$, nemá konvergentní podposloupnost?
10. Dokažte uvedenou charakterizaci otevřených a uzavřených množin v podprostoru pomocí otevřených a uzavřených množin celého prostoru.

11. Nechť $(M, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ a $X \subset M$ je dána jako $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(4, 4)\}$. Popište vnitřní, vnější, hraniční, limitní a izolované body množiny X.

12. Dokažte, že euklidovské prostory (a, b), $a < b$ jsou reálná čísla, a $\mathbb{R}$ jsou homeomorfní.