3. přednáška 15. října 2007

Kompaktnost a uzavřené a omezené množiny. Kompaktní množiny jsou vždy uzavřené a omezené, a v euklidovských prostorech to platí i naopak. Obecně to ale naopak neplatí.

Tvrzení 1.5. *Kompaktní podmnožiny v metrickém prostoru jsou uzavřené a omezené.*

Důkaz. Nechť $X \subset M$ je podmnožina v metrickém prostoru (M, d), která není uzavřená. Existuje tedy konvergentní posloupnost $(a_n) \subset X$, jejíž limita a leží mimo X (Tvrzení 1.2). Každá její podposloupnost má ale a jako limitu a není proto konvergentní v (X, d). Podprostor (X, d) není kompaktní, neboť posloupnost (a_n) nemá konvergentní podposloupnost.

Nechť X není omezená. Inkluze $X \subset B(a, r)$ tedy neplatí pro žádnou kouli $B(a, r)$ a díky tomu lehce sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset X$ splňující $d(a_m, a_n) \geq 1$ pro každé dva indexy $1 \leq m < n$. (Když už máme v X body $a_1, a_2, \ldots, a_k$, z nichž každé dva mají vzdálenost ≥ 1, zvolíme $a_{k+1} \in X$ mimo kouli $B(a_1, r)$, kde $r = 2 + \max_{1 \leq i \leq k} d(a_1, a_i)$. Pak $d(a_{k+1}, a_i) \geq 1$ pro $1 \leq i \leq k$.) Tuto vlastnost má zřejmě i každá podposloupnost a žádná proto není konvergentní. Podprostor (X, d) tedy není kompaktní. □

Jak jsme už poznamenali, konvergentnost je relativní vlastnost, která závisí na obklopujícím podprostoru—přechodem k podprostoru může posloupnost přestat být konvergentní. Je-li ovšem posloupnost konvergentní v podprostoru, je nutně konvergentní i v celém prostoru. S otevřeností a uzavřeností množin se to má opačně. Pokud $X \subset Y \subset M$ a množina X je otevřená v celém prostoru (M, d), pak je X otevřená i v podprostoru (Y, d), a totéž platí pro uzavřenost (úloha 1). Přechodem k nadprostoru se ale otevřenost a uzavřenost může ztratit—například Y je vždy otevřená i uzavřená v (Y, d), ale už to tak nemusí být v (M, d).

Kompaktnost je absolutní vlastnost, úplně nezávislá na obklopujícím podprostoru. Z definice je jasné, že pokud $X \subset Y \subset M$, pak X je kompaktní v podprostoru (Y, d), právě když je kompaktní v celém prostoru (M, d).

Věta 1.6. *Kompaktní podmnožiny euklidovského prostoru* $\mathbf{R}^n$ *jsou právě a jen uzavřené a omezené množiny.*

Důkaz. Kompaktní množina $X \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená a omezená podle Tvrzení 1.5. Naopak, nechť je podmnožina $X \subset \mathbf{R}^n$ uzavřená a omezená. Pak, díky omezenosti, existuje $c > 0$ tak, že $X \subset [-c, c]^n$. Krychle $[-c, c]^n$ je kompaktní množina (protože interval $[-c, c]$ je kompaktní v $\mathbf{R}$ a kompaktnost se zachovává kartézskými součiny, část 3 Tvrzení 1.4). Protože X je uzavřená v $\mathbf{R}^n$, je uzavřená i v podprostoru $[-c, c]^n$. Takže X je kompaktní v podprostoru $[-c, c]^n$ (část 1 Tvrzení 1.4) a je tedy kompaktní i v celém prostoru $\mathbf{R}^n$ (díky absolutnosti kompaktnosti). □

Obecně omezenost a uzavřenost množiny ještě nezaručují kompaktnost, což potvrdíme dvěma příklady. M buď libovolná nekonečná množina a (M, d) *diskrétní metrický prostor*, tedy $d(x, x) = 0$ a $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$. Celý prostor M je uzavřený a omezený ($M \subset B(a, 2)$ pro každý bod $a \in M$). Každá posloupnost $(a_n) \subset M$, jejíž členy jsou vzájemně různé, splňuje $d(a_m, a_n) = 1$ pro každé dva indexy $1 \leq m < n$ a není proto konvergentní. Totéž platí i pro každou její podposloupnost.

Jako druhý příklad vezmeme spojité funkce $M = \mathcal{C}[0, 1]$ s maximovou metrikou a podmnožinu $X = \{f \in M \mid \max_{[0,1]} |f| \leq 1\}$. Lehce se sestrojí taková posloupnost funkcí $(f_n) \subset X$, že pro každé dva indexy $1 \leq m < n$ platí

$$d(f_m, f_n) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_m(x) - f_n(x)| = 1.$$

Tato posloupnost pak zřejmě nemá konvergentní podposloupnost, i když je množina X omezená a uzavřená (podrobnosti viz úloha 3).

Spojitá funkce nabývá na kompaktu extrémy. Užitečnost kompaktních množin popisuje následující věta.

Věta 1.7. *Nechť $f : M_1 \to M_2$ je spojité zobrazení mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), přičemž M_1 je kompaktní.*

1. *Je-li $M_2 = \mathbf{R}$ jednorozměrný euklidovský prostor, nabývá f na M_1 maxima i minima.*
2. *Je-li f navíc bijekce, pak je inverzní zobrazení f^{-1} nutně spojité.*
3. *Zobrazení f je dokonce stejnoměrně spojité.*

Důkaz. 1. Podle části 2 Tvrzení 1.4 je $f(M_1)$ kompaktní podmnožina v $\mathbf{R}$. Což podle Tvrzení 1.5 znamená, že je uzavřená a omezená. Takže $f(M_1)$ má konečné supremum, které je rovno maximu (supremum $f(M_1)$ je totiž limitou jisté posloupnosti bodů z $f(M_1)$) a množina $f(M_1)$ proto má maximum. Podobně pro minimum.

2. Podle Tvrzení 1.3 stačí ověřit, že pro každou uzavřenou množinu $X \subset M_1$ je její vzor $(f^{-1})^{-1}(X) \subset M_2$ uzavřená množina. Protože f je bijekce, máme $(f^{-1})^{-1} = f$. Nechť $X \subset M_1$ je uzavřená. Podle části 1 Tvrzení 1.4 je X kompaktní. Podle části 2 je $f(M_1)$ kompaktní množina v M_2. Podle Tvrzení 1.5 je $f(M_1)$ uzavřená.

3. Přenecháváme čtenářce jako cvičení (úloha 4). □

Jako aplikaci části 1 této věty nyní dokážeme, že každý nekonstantní komplexní polynom má alespoň jeden kořen.

Základní věta algebry. *Nechť $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ je polynom s komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ (takže $a_i \in \mathbf{C}$ a $a_n \neq 0$). Pak existuje takové číslo $\alpha \in \mathbf{C}$, že $p(\alpha) = 0$.*

Důkaz. Komplexní rovina $\mathbf{C}$ se standardní metrikou

$$d(a+bi, c+di) = |a+bi-(c+di)| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

je izometrická euklidovské rovině $\mathbf{R}^2$. Bereme ji tedy jako euklidovský prostor $\mathbf{R}^2$. Existence kořene α polynomu $p(z)$ plyne okamžitě z následujících dvou kroků.

Krok 1. *Pro každý komplexní polynom $p(z)$ nabývá funkce $f(z) = |p(z)|$, $f:\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, na $\mathbf{C}$ svého minima.*

Krok 2. *Nechť nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ splňuje v bodu $\alpha \in \mathbf{C}$ nerovnost $|p(\alpha)| > 0$ (tj. $p(\alpha) \neq 0$). Pak existují $\delta > 0$ a polopřímka $\ell \subset \mathbf{C}$ vycházející z α tak, že*

$$z \in \ell \ \&\ 0 < |z-\alpha| < \delta \Rightarrow |p(z)| < |p(\alpha)|.$$

(Analogický výsledek platí i pro opačnou nerovnost $|p(z)| > |p(\alpha)|$.)

Skutečně, pro nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ vezmeme α, v němž se podle kroku 1 nabývá nejmenší hodnota modulu $|p(z)|$. Podle kroku 2 musí platit $|p(\alpha)| = 0$, takže $p(\alpha) = 0$ a α je kořenem $p(z)$.

Základní myšlenky důkazů obou kroků budeme ilustrovat na konkrétním polynomu

$$p(z) = z^5 + (3i)z^3 + (-1+i).$$

Důkaz kroku 1. Funkce $f(z) = |p(z)|$ je spojitá (úloha 5), nemůžeme však hned použít Větu 1.7, protože $\mathbf{C}$ není kompaktní. Máme

$$|p(0)| = |-1+i| = \sqrt{2} < 2.$$

Na druhou stranu, vytknutím nejvyšší mocniny

$$p(z) = z^5(1 + 3i/z^2 + (-1+i)/z^5)$$

dostáváme odhad

$$|z| \geq 2 \Rightarrow |p(z)| \geq 2^5(1 - |3i|/2^2 - |-1+i|/2^5) = 2^5 - 3 \times 2^3 - \sqrt{2} > 6.$$

(Použili jsme nerovnost $|a+b| \geq |a| - |b|$.) Mimo kruh

$$K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 2\}$$

má tedy $|p(z)|$ všechny hodnoty větší než v nule, což je bod K, a pokud nabývá na $\mathbf{C}$ minima, musí to být někde na K. Nabývání minima na K je už ale zaručeno Větou 1.7 (část 1), protože K je kompaktní (podle Věty 1.6, K je uzavřená a omezená množina). Takže $|p(z)|$ nabývá na $\mathbf{C}$ minimum. Podobné odhady fungují pro obecný polynom.

Důkaz kroku 2. Můžeme předpokládat, že $\alpha = 0$. Pro obecné α uděláme substituci $z = (z - \alpha) + \alpha = t + \alpha$, kterou přejdeme k polynomu

$$q(t) = p(t + \alpha)$$

v okolí bodu $t = 0$. Podívejme se tedy na náš konkrétní polynom $p(z) = z^5 + (3i)z^3 + (-1+i)$ v okolí bodu $z = \alpha = 0$. Jak už víme, $|p(0)| = |-1+i| = \sqrt{2} > 0$. Nyní nám pomůže vytknutí nejnižší nekonstantní mocniny,

$$p(z) = -1 + i + (3i)z^3 + (3i)z^3 \cdot z^2/3i.$$

Idea je zvolit z blízko u nuly a s vhodným argumentem, aby se k $-1 + i$ přičetlo číslo, které je k nule blíže a leží na opačné straně. Výsledek pak je číslo s modulem menším než $|-1 + i|$.

Zvolíme tedy $\delta > 0$ dostatečně malé, že

$$|z| < \delta \Rightarrow |(3i)z^3| < |-1 + i| \text{ a } |z^2/3i| < 1.$$

Pokud navíc

$$\arg(z) = \frac{\arg(-1 + i) + \pi - \arg(3i)}{3} = \frac{3\pi/4 + \pi - \pi/2}{3} = 5\pi/12,$$

máme $\arg((3i)z^3) - \arg(-1 + i) = \pi$ (takže $(3i)z^3$ a $-1 + i$ leží na opačné straně od nuly) a

$$|-1 + i + (3i)z^3| = |-1 + i| - |(3i)z^3|.$$

Celkem pro $z \in \mathbf{C}$ splňující $0 < |z| < \delta$ a $\arg(z) = 5\pi/12$ máme

$$\begin{aligned} |-1 + i + (3i)z^3 + (3i)z^3 \cdot z^2/3i| &\leq |-1 + i + (3i)z^3| + |(3i)z^3| \cdot |z^2/3i| \\ &= |-1 + i| - |(3i)z^3| + |(3i)z^3| \cdot |z^2/3i| \\ &< |-1 + i|. \end{aligned}$$

Pro $0 < |z| < \delta$ a $\arg(z) = 5\pi/12$ tak platí, že $|p(z)| < |p(0)|$.

Pro obecný polynom se podobné odhady použijí pro $p(z)$ ve tvaru $p(z) = \kappa + \lambda z^k + q(z)$, kde $\kappa, \lambda \in \mathbf{C}$ jsou nenulové konstanty, $k \geq 1$ (zde využíváme, že $p(z)$ je nekonstantní) a v $q(z)$ jsou mocniny z s exponenty vyššími než k. Pro malé $|z|$ je $q(z)$ zanedbatelná porucha a $p(z)$ se chová víceméně jako $\kappa + \lambda z^k$. Vhodným nastavením $\arg(z)$ pak dosáhneme, že $|p(z)| \doteq |\kappa + \lambda z^k| = |\kappa| - |\lambda z^k| < |\kappa| = |p(0)|$. $\square$

Všimněte si, že výsledek v kroku 2 říká hodně o tom, kde může funkce $z \mapsto |p(z)|$ nabývat na kompaktní množině $X \subset \mathbf{C}$ lokální extrém. Ve vnitřním bodě X to je možné, jen když jde o lokální minimum s nulovou hodnotou. Ostatní lokální extrémy se musejí nabývat v hraničních bodech množiny X (které v ní leží, X je uzavřená). V komplexní analýze se tento výsledek, tzv. princip maxima modulu, dokazuje pro daleko širší třídu funkcí, než jsou polynomy.

Topologická kompaktnost. Podobně jako spojitost zobrazení se kompaktnost dá také ekvivalentně vyjádřit topologicky, jen pomocí otevřených množin. Pro množinu X v metrickém prostoru (M, d) nazveme systém množin $\{O_i \mid i \in I\}$ v M jejím *otevřeným pokrytím*, když jsou všechny množiny O_i otevřené a

$$X \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Konečné podpokrytí pak je konečný podsystém $\{O_j \mid j \in J\}$, $J \subset I$ je konečná, který stále pokrývá X. Množina X je *topologicky kompaktní*, když každé její otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.

Věta 1.8. *Množina v metrickém prostoru je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz. *Tento důkaz nebyl na přednášce a nebude se zkoušet.* Stačí se omezit na případ celého prostoru $X = M$ (úloha 6).

Kompaktnost ⇒ topologická kompaktnost. Předpokládáme, že prostor (M, d) je kompaktní a dokážeme, že je i topologicky kompaktní. Nejprve ukážeme, že pro každé $r > 0$ existuje konečná množina S, že

$$M = \bigcup_{a \in S} B(a, r).$$

Množině S se říká *r-síť*. Každý bod má od nějakého prvku r-sítě vzdálenost menší než r. Řekněme, že pro nějaké $s > 0$ žádná konečná množina v M není s-síť. Vezmeme $a_1 \in M$ libovolně. Protože $\{a_1\}$ není s-síť, existuje $a_2 \in M$ tak, že $d(a_1, a_2) \geq s$. Protože $\{a_1, a_2\}$ není s-síť, existuje $a_3 \in M$, že $d(a_1, a_3) \geq s$ a $d(a_2, a_3) \geq s$. Takto postupujeme dále a sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset M$ s vlastností, že $d(a_m, a_n) \geq s$ pro každé dva indexy $1 \leq m < n$. Tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s předpokladem kompaktnosti.

Předpokládejme pro spor, že systém množin $\{O_i \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí M, které nemá konečné podpokrytí. Jako S_n si označíme konečnou $1/n$-síť. Kdyby pro každý bod $a \in S_n$ koule $B(a, 1/n)$ celá ležela v nějaké množině $O_{i(a)}$, podsystém $\{O_{i(a)} \mid a \in S_n\}$ by byl konečným podpokrytím: $B(a, 1/n) \subset O_{i(a)}$ pro každé $a \in S_n$, takže

$$M = \bigcup_{a \in S_n} B(a, 1/n) \subset \bigcup_{a \in S_n} O_{i(a)}.$$

Pro každé $n = 1, 2, \dots$ tedy můžeme vybrat bod a_n z S_n, že koule $B(a_n, 1/n)$ není obsažena v žádné množině O_i. Posloupnost (a_n) má konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou a. Protože systém množin pokrývá M, existuje $j \in I$, že $a \in O_j$. Množina O_j je otevřená, a tak $B(a, r) \subset O_j$ pro nějaké $r > 0$. Vezmeme tak velké $N \in \mathbf{N}$, že $d(a_{k_N}, a) < r/2$ a $1/k_N < r/2$. Pak, díky trojúhelníkové nerovnosti,

$$B(a_{k_N}, 1/k_N) \subset B(a, r) \subset O_j,$$

což je spor s definicí bodů a_n.

Topologická kompaktnost ⇒ kompaktnost. Předpokládáme, že prostor (M, d) je topologicky kompaktní a dokážeme, že je i kompaktní. Nechť $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost. Ukážeme, že existuje takový bod a, že pro každé $r > 0$ je množina indexů $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \in B(a, r)\}$ nekonečná. Je lehké vidět, že takový bod už je limitou nějaké podposloupnosti vybrané z (a_n).

Kdyby to tak nebylo, tak pro každý bod $a \in M$ existuje poloměr $r(a) > 0$, že množina

$$I(a) = \{n \in \mathbf{N} \mid a_n \in B(a, r(a))\}$$

je konečná. Systém $\{B(a, r(a)) \mid a \in M\}$ je otevřené pokrytí M. Podle předpokladu má konečné podpokrytí určené konečnou množinou $X \subset M$. Uvažme množinu indexů

$$I = \bigcup_{a \in X} I(a).$$

Protože je konečná (je konečným sjednocením konečných množin), mohu vybrat index $N \in \mathbf{N} \backslash I$. Pak (podsystém $\{B(a, r(a)) \mid a \in X\}$ je pokrytí M)

$$a_N \in M = \bigcup_{a \in X} B(a, r(a)),$$

takže $a_N \in B(b, r(b))$ pro nějaké $b \in X$ a $N \in I(b) \subset I$, což je spor s výběrem indexu N. □

Úlohy

1. Dokažte, že otevřenost množiny se zachová přechodem k podprostoru, a totéž platí pro uzavřenost.

2. Rozhodněte, zda je konečný diskrétní metrický prostor kompaktní.

3. Doplňte detaily v druhém příkladu za Větou 1.6: ukažte, že X je omezená a uzavřená a definujte v X posloupnost funkcí, v níž každé dvě funkce mají v maximové metrice vzdálenost 1.

4. Dokažte, že spojité zobrazení z kompaktního metrického prostoru (M_1, d_1) do jiného metrického prostoru (M_2, d_2) je nutně stejnoměrně spojité, to jest

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ x, y \in M_1, d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

5. Dokažte, že pro komplexní polynom $p(z)$ je $z \mapsto |p(z)|$ spojité zobrazení z $\mathbf{C}$ do $\mathbf{R}$.

6. Ukažte, že pro $X \subset Y \subset M$ je X topologicky kompaktní v podprostoru (Y, d), právě když je topologicky kompaktní v celém prostoru (M, d).